

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.029>
УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Є.Д. Белов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: vfmeish@gmail.com

До постановки динамічних задач теорії дискретно поздовжньо підкріплених кінцевих оболонок в неортогональній системі координат

Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком

Розглянуто постановку динамічних задач поздовжньо підкріплених кінцевих оболонок еліптичного поперечного перерізу при впливі на них розподіленого навантаження. Наведено рівняння коливань підкріпленої кінцевої оболонки в неортогональній системі координат. Використано варіант теорії оболонок та стержнів С.П. Тимошенка.

Ключові слова: кінцева оболонка, еліптичний переріз, теорія оболонок та стержнів С.П. Тимошенка.

Розглядається постановка задачі динамічного деформування дискретно підкріпленої кінцевої оболонки еліптичного перерізу при розподіленому внутрішньому навантаженні. Рівняння серединної поверхні оболонки в параметричному вигляді задаються згідно зі співвідношенням:

$$X = k_1 x^1 \cos x^2, \quad Y = x^1 \sin x^2, \quad Z = k_2 x^1, \quad (1)$$

де X, Y, Z – декартова система координат; x^1, x^2 – координати на серединній поверхні оболонки; $k_1 = a/b$, $k_2 = c/b$; a, b – параметри еліптичності основи конуса; c – висота конуса.

Рівняння (1) визначають коефіцієнти першої та другої квадратичної форми серединної поверхні оболонки, що розглядається, за формулами

$$a_{ij} = \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} + \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} + \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, 2);$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} - \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} - \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} - \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial x^j} \right]. \quad (2)$$

При цьому згідно з (1),

$$\begin{aligned} a_{11} &= k_1^2 \cos^2 x^2 + \sin^2 x^2 + k_2^2; & a_{22} &= (x^1)^2 (k_1^2 \sin^2 x^2 + \cos^2 x^2); \\ a_{12} &= 0,5x^1(1-k_1^2)\sin 2x^2; & b_{11} &= 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = k_1 k_2 (x^1)^2 / \sqrt{g}, \end{aligned}$$

де g — фундаментальний визначник метричного тензора, що визначається $g = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Для опису динамічної поведінки конічних оболонок приймається лінійний варіант уточненої теорії тонких оболонок в рамках моделі С.П. Тимошенка [1, 2]. Закон розподілення переміщень по товщині оболонки приймається у вигляді

$$\begin{aligned} u_1^z &= u_1(x^1, x^2, t) + z\varphi_1(x^1, x^2, t), \\ u_2^z &= u_2(x^1, x^2, t) + z\varphi_2(x^1, x^2, t), \quad u_3^z = u_3(x^1, x^2, t); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u^{1z} &= u^1(x^1, x^2, t) + z\varphi^1(x^1, x^2, t), \\ u^{2z} &= u^2(x^1, x^2, t) + z\varphi^2(x^1, x^2, t). \end{aligned} \quad (4)$$

У співвідношеннях (3) та (4) величини з нижніми індексами відповідають коваріантним компонентам узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки $\bar{U}_1 = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$, а величини з верхніми індексами — контрваріантним компонентам узагальненого вектора переміщень $\bar{U}^1 = (u^1, u^2, u^3, \varphi^1, \varphi^2)$ [2].

Поздовжнє i -е ребро розглядається як одновимірною системою, яка характеризується лінією центра ваги поперечного перерізу ребра. Рівняння лінії центра ваги поперечного перерізу i -го поздовжнього ребра в параметричному вигляді задаються як частковий випадок співвідношень (1) при фіксованому значенні змінної x^2 , тобто

$$x_i = k_1 x^1 \cos x_i^2, \quad y_i = x^1 \cos x_i^2, \quad z_i = k_2 x^1. \quad (5)$$

Згідно з рівняннями (2) маємо

$$a_{11i} = k_1^2 (\cos x_i^2)^2 + (\sin x_i^2)^2 + k_2^2.$$

Для опису динамічної поведінки i -го поздовжнього ребра приймається лінійний варіант теорії стержнів в рамках моделі С.П. Тимошенка [1]. Тобто, лінія центра ваги поперечного перерізу i -го ребра характеризується двома векторами:

$$\bar{U}_{1i} = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}) \quad \text{та} \quad \bar{U}_i^1 = (u_i^1, u_i^2, u_i^3, \varphi_i^1, \varphi_i^2).$$

В подальшому покладається, що ребро жорстко з'єднане з оболонкою. При цьому умови контакту i -те ребро — оболонка мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} u_{1i}(x^1) &= u_1(x^1, x_i^2) \pm h_i \varphi_1(x^1, x_i^2), & u_{2i}(x^1) &= u_2(x^1, x_i^2) \pm h_i \varphi_2(x^1, x_i^2), \\ u_{3i}(x^1) &= u_3(x^1, x_i^2), & \varphi_{1i}(x^1) &= \varphi_1(x^1, x_i^2), & \varphi_{2i}(x^1) &= \varphi_2(x^1, x_i^2); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_i^1(x^1) &= u^1(x^1, x_i^2) \pm h_i \varphi^1(x^1, x_i^2), & u_i^2(x^1) &= u^2(x^1, x_i^2) \pm h_i \varphi^2(x^1, x_i^2), \\ u_i^3(x^1) &= u^3(x^1, x_i^2) & \varphi_{i2i}^1(x^1) &= \varphi^1(x^1, x_i^2), & \varphi_{i2i}^2(x^1) &= \varphi^2(x^1, x_i^2). \end{aligned} \quad (7)$$

В співвідношеннях (6) та (7) $h_i = 0,5(h + h_{pi})$; h_{pi} – висота i -го ребра; знаки “ \pm ” відповідають випадкам зовнішнього та внутрішнього підкріплення відповідно.

Для виведення рівнянь коливань конічних оболонок застосовується варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta \Pi + \delta A) dt = 0, \quad \Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^I \Pi_i, \quad K = K_0 + \sum_{i=1}^I K_i, \quad (8)$$

де Π_0, Π_i – потенціальна енергія гладкої оболонки та i -го ребра; K_0, K_i – відповідні кінетичні енергії; A – робота зовнішніх сил.

Вирази для потенціальної та кінетичної енергії задаються такими формулами:

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (T^{11} \epsilon_{11} + T^{22} \epsilon_{22} + 2T^{12} \epsilon_{12} + 2T^{13} \epsilon_{13} + 2T^{23} \epsilon_{23} + M^{11} \kappa_{11} + M^{22} \kappa_{22} + 2M^{12} \kappa_{12}) d\Omega,$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{L_i} (T_i^{11} \epsilon_{11i} + T_i^{12} \epsilon_{12i} + T_i^{11} \epsilon_{11i} + M_i^{11} \kappa_{11i} + M_i^{12} \kappa_{12i}) dL_i,$$

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \frac{\partial u^3}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial \phi^1}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \frac{\partial \phi^2}{\partial t} \right) d\Omega,$$

$$K_i = \frac{\rho_i}{2} \int_{L_i} \left[F_i \left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial t} \frac{\partial u_{1i}^i}{\partial t} + \frac{\partial u_{2i}}{\partial t} \frac{\partial u_{2i}^i}{\partial t} + \frac{\partial u_{3i}}{\partial t} \frac{\partial u_{3i}^i}{\partial t} \right) + I_{1i} \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial t} \frac{\partial \phi_{1i}^i}{\partial t} + I_{2i} \frac{\partial \phi_{2i}}{\partial t} \frac{\partial \phi_{2i}^i}{\partial t} \right] dL_i,$$

$$d\Omega = \sqrt{g} dx^1 dx^2, \quad dL_i = a_{11i} dx^1.$$

Після стандартних перетворень у функціоналі (8) отримуємо дві групи рівнянь коливань вихідної неоднорідної конструкції в загальному вигляді:

рівняння коливань власно гладкої конічної оболонки

$$\rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_i T^{ij} - b_i^j T^{i3} + P^i \quad (i, j = 1, 2);$$

$$\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \nabla_i T^{i3} + b_{ij} T^{ij} + P_3; \quad (9)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^2} = \nabla_i M^{ij} - T^{i3} + m^i;$$

рівняння коливань i -го підкріплюючого ребра

$$\frac{\partial T_i^{1j}}{\partial x^1} + [T^{2j}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^j}{\partial t^2} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial M_i^{1j}}{\partial x^1} + [M^{2j}]_i - T_i^{13} \delta_{1j} = \rho_i I_i \frac{\partial^2 \phi_i^j}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2).$$

У формулах (9) індексами 1 та 2 позначені змінні по координатах $x^1, x^2; u^1, u^2, u_3, \varphi^1, \varphi^2$ – контраваріантні компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки; T^{ij}, T^{i3}, M^{ij} – контраваріантні компоненти тензорів зусиль та моментів; P^i, P_3, m^i – компоненти зусиль на поверхні оболонки; ∇_i – контраваріантна похідна; ρ – густина матеріалу оболонки; h – товщина оболонки; $I = h^3/12$; δ_{ij} – символ Кронекера.

У формулах (10) $u_i^1, u_i^2, u_i^3, \varphi_i^1, \varphi_i^2$ – контраваріантні компоненти узагальненого вектора переміщень лінії центра ваги поперечного перерізу i -го ребра; T_i^{1j}, M_i^{1j} – контраваріантні компоненти тензорів зусиль – моментів для i -го ребра; ρ_i – густина матеріалу i -го ребра; F_i, I_i – геометричні параметри; позначення типу $[T^{2j}]_i, [M^{2j}]_i$ відповідають сумарній дії величин зусиль гладкої оболонки на i -й дискретний елемент.

У розгорнутому вигляді, згідно з [3], рівняння коливань (9) в дивергентній формі записуються [4] так:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \\
 & + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{1n} - b_2^1 T^{2n} = \rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{22}) + \Gamma_{11}^2 T^{11} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} + \\
 & + \Gamma_{22}^2 T^{22} - b_1^2 T^{13} - b_2^2 T^{22} + q^2 = \rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{23}) + b_{11} T^{11} + b_{12} T^{12} + \\
 & + b_{21} T^{12} + b_{22} T^{22} + q^3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{12}) + \Gamma_{11}^1 M^{11} + 2\Gamma_{21}^1 M^{12} + \\
 & + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{22}) + \Gamma_{11}^2 M^{11} + 2\Gamma_{12}^2 M^{12} + \\
 & + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

У співвідношеннях (11) величини Γ_{ij}^k являють собою коефіцієнти символів Крістоффеля другого роду [3].

Рівняння (10) в розгорнутому вигляді записуємо так [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i^{11}}{\partial x^1} + [T^{21}]_i &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2}, & \frac{\partial T_i^{12}}{\partial x^1} + [T^{22}]_i &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial t^2}, & \frac{\partial T_i^{13}}{\partial x^1} + [T^{23}]_i &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_i^{11}}{\partial x^1} + T_i^{13} + [M^{21}]_i &= \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \phi_i^1}{\partial t^2}, & \frac{\partial M_i^{12}}{\partial x^1} + [M^{22}]_i &= \rho_i I_{2i} \frac{\partial^2 \phi_i^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

До рівнянь коливань неоднорідної підкріпленої оболонки (11), (12) додаються відповідні граничні та початкові умови, які випливають з варіаційного принципу стаціонарності (8).

Зокрема, для випадку вільного краю маємо:

$$\begin{aligned} T^{11} + \sum_{i=1}^I T_i^{11} \Big|_{x^2=x_i^2} &= 0, & T^{12} + \sum_{i=1}^I T_i^{12} \Big|_{x^2=x_i^2} &= 0, \\ T^{13} + \sum_{i=1}^I T_i^{13} \Big|_{x^2=x_i^2} &= 0, & M^{11} + \sum_{i=1}^I (M_i^{11} \pm h_i T_i^{11}) \Big|_{x^2=x_i^2} &= 0, \\ M^{12} + \sum_{i=1}^I (M_i^{12} \pm h_i T_i^{12}) \Big|_{x^2=x_i^2} &= 0. \end{aligned}$$

Таким чином, в даній роботі наведено постановку задач динаміки поздовжньо підкріплених конічних оболонок еліптичного перерізу в неортогональній системі координат.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Головка К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Киев: Изд.-полиграф. центр "Киев. ун-т", 2012. 541 с.
2. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. К.З. Галимов (ред.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 212 с.
3. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями в механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.
4. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Белов Є.Д. Динаміка конічних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 1. С. 29–33. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029>

Надійшло до редакції 15.01.2019

REFERENCES

1. Golovko, K. G., Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2012). Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads. Kyiv: Publ. Center "Kyiv University" (in Russian).
2. The theory of shells with allowance for transverse shear. Galimova K.Z. (Ed.). (1977). Kazan: Publ. house of Kazan Univ. (in Russian).
3. Kilchevsky, N. A. (1972). Fundamentals of tensor calculus with applications in mechanics. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).

4. Meish, V. F., Meish, Yu. A. & Belov, Ye. D. (2018). The dynamics of conical shells of the elliptic section at non-stationary loads. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, No. 1, pp. 29-33. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029>

Received 15.01.2019

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Є.Д. Белов

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: vfmeish@gmail.com

К ПОСТАНОВКЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
ДИСКРЕТНО ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК В НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрена постановка задач динамического поведения продольно подкрепленной конической оболочки эллиптического сечения при воздействии на нее распределенной нагрузки. Приводятся уравнения колебаний подкрепленной конической оболочки в неортогональной системе координат. Используется вариант теории оболочек и стержней С.П. Тимошенко.

Ключевые слова: коническая оболочка, эллиптическое сечение, теория оболочек и стержней С.П. Тимошенко.

V.F. Meish, Yu.A. Meish, Ye.D. Belov

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: vfmeish@gmail.com

TO THE STATEMENT OF DYNAMIC PROBLEMS OF THE THEORY
OF DISCRETE LONGITUDINALLY REINFORCED CONICAL SHELLS
IN A NONORTHOGONAL CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM

The paper deals with the problem of the dynamic behavior of a longitudinally reinforced conical shells with elliptic cross-section under the action of a distributed load. The equations of oscillations of the reinforced conical shell in a nonorthogonal coordinate system are given. A variant of the theory of shells and rods by S.P. Timoshenko is used.

Keywords: conical shell, elliptic cross-section, Timoshenko theory of shells and rods.