https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.01.033
УДК 531

Н.В.Никитина, О.Ю.Талимонова

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Бифуркации связанных нелинейных осцилляторов с подобной кинематикой

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

Анализируется применение принципа кососимметрии для нелинейных систем, которые представляют связку нелинейных осцилляторов Ван дер Поля. Связка осцилляторов может (в зависимости от параметров) образовывать системы связанных регулярных предельных циклов и связанных аттракторов с хаотической, либо условно-периодической намоткой траектории. При слабом изменении параметров осцилляторов изменяется масштаб двух предельных циклов. Сильное изменение параметров и коэффициента связки приводит к появлению предельных циклов с хаотической намоткой траектории. При рассмотрении трех связанных предельных циклов можно привести к двум с периодической обмоткой и один предельный цикл с намоткой типа условно-периодической. Для уточнения характера обмотки траекторий следует сделать топологический анализ. В этом случае составляется уравнение в вариациях и находятся характеристические показатели решений.

Ключевые слова: *нелинейная система, бифуркация, принцип кососимметриии.*

Для анализа бифуркации связанных классических нелинейных осцилляторов можно применить принцип кососимметрии, который устанавливает замыкание траектории и определенную симметрию траектории [1]. При этом можно установить кососимметричный характер замкнутой траектории связки осцилляторов. Предтечей принципа кососимметрии является принцип симметрии.

История принципа симметрии связана с работой [2]. Для двумерных систем принцип симметрии [1] может быть применен для анализа бифуркаций и установления замыкания траекторий. Критерии устойчивости орбиты (замыкания) в двумерных системах изложены в монографии [2]. Запишем двумерную систему в следующем виде:

$$dx_1 / dt = F_1(x), \quad dx_2 / dt = F_2(x), \tag{1}$$

где $x_1, x_2 \in R$ и $F_1 \in C(R^2, R)$, $F_2 \in C(R^2, R)$.

Приведем геометрический принцип симметрии, на основе которого можно установить условия замыкания фазовой траектории.

В системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_1(x)$ относительно x_1 и нечетности функции $F_2(x)$ относительно x_1, т. е.

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2), \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \tag{2}$$

Это утверждение основано на том, что на плоскости Ox_1x_2 ось Ox_2 является осью симметрии, и всякая интегральная кривая слева от оси x_2 — зеркальным отображением кривой справа.

На основе принципа симметрии можно заключить, что в системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_2(x)$ относительно x_2 и нечетности $F_1(x)$ относительно x_2, т.е.

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(x_1, x_2), \quad F_2(x_1, -x_2) = F_2(x_1, x_2). \tag{3}$$

Здесь (согласно (3)) ось Ox_1 является осью симметрии.

Принцип кососимметрии для нелинейных систем впервые был применен в работе [3]. В нелинейной системе (1) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (1), связаны следующими условиями:

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2), \quad F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2). \tag{4}$$

Кососимметрия связана с двумя осями координат. То есть, если ось Ox_1 — ось кососимметрии, то ось Ox_2 также является осью кососимметрии.

В нелинейной системе (1) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (1) связаны следующими условиями

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2), \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2). \tag{5}$$

До введения принципа кососимметрии явление замыкания, например, фазовой траектории осциллятора Ван дер Поля, в классической литературе определяется так: “как известно, уравнение Ван дер Поля при любом малом параметре имеет на фазовой плоскости единственный предельный цикл, который является устойчивым. Этот математический факт адекватен экспериментально наблюдаемому физическому феномену”... [4].

Принцип кососимметрии применим лишь для нелинейной двумерной системы. Например, для осциллятора Ван дер Поля, осциллятора Дуффинга.

При разных вариантах замыкания (симметрии и кососимметрии) рассмотрено построение критерия замыкания траектории в трехмнерных сисмтемах [5]. При построении доказательства замкнутости кривой в трехмерных системах рассматривается замыквние на каждой координатной плоскости.

Системы связанных осцилляторов.

Пример 1. Рассмотрим два осциллятора Ван дер Поля.

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \ddot{y} - \nu(1 - y^2)y + y = 0; \tag{6}$$

Свяжем систему двух уравнений Ван-дер-Поля на плскостях x_1x_2, y_1y_2

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 + \varepsilon(y_1 - x_1); \tag{7}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = \nu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 + \varepsilon(x_1 - y_1) \tag{8}$$

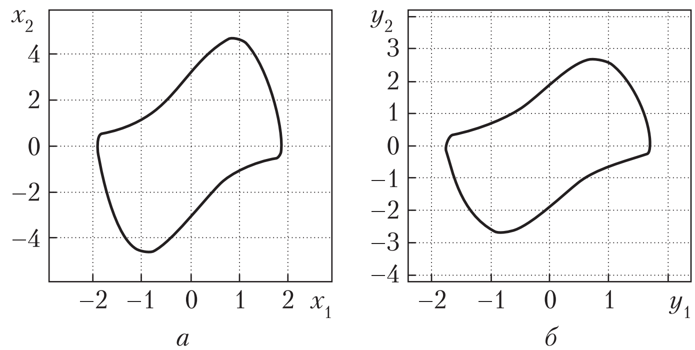

Рис. 1

Здесь ε — параметр связки. Замыкание траектории системы (7), (8) происхотдит согласно принципу кососимметрии. Предполагается, что нелинейный осциллятор имеет линейную и нелинейную составляющие диссипации. Линейная порождает в нуле неустойчивую особую точку (неустойчивый фокус), а нелинейная составляющая порождает кососимметрию траектории. Нелинейная составляющая ограничивает область ухода траектории из нуля кососимметричной кривой. Эта кривая образует предельный цикл, который замыкается в силу кососимметрии. Системы (7), (8) (записаны ниже в общем виде)

$$\frac{dx_1}{dt} = F_{x1}(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = F_{x2}(x_1, x_2, y_1);$$

$$\frac{dy_1}{dt} = F_{y1}(y_1, y_2); \quad \frac{dy_2}{dt} = F_{y2}(y_1, y_2, x_1)$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$F_{x1}(-x_1, x_2) = -F_{x1}(x_1, -x_2), \; F_{x2}(-x_1, x_2) = -F_{x2}(x_1, -x_2, y_1). \tag{9}$$

$$F_{y1}(y_1, -y_2) = -F_{y1}(-y_1, y_2), \; F_{y2}(y_1, -y_2) = -F_{y2}(-y_1, y_2, x_1). \tag{10}$$

Условия (9), (10) создают кососимметрию замкнутой траектории на координатных плоскостях.

На рис 1 приведены портреты предельных циклов, построенные численно и соответствующие осцилляторам (7), (8) при параметре связки $\varepsilon = 0{,}9$. Остальные параметры имеют следующие значения $\mu = 3$; $\nu = 2$. Здесь величины μ; ν достаточно близки и результаты принципа кососимметрии совпадают с численными результатами: траектории замкнуты и кососимметричны. При уменьшении значения коэффициента связи ($\varepsilon = 0{,}3$) теряется замкнутость фазовой траектории (рис. 2).

Заметим, что при большом различии значений параметров μ, ν на траектории появляются участки с непериодическими точками, которые замедляют движение изображающей точки. Изменение параметров могут вызывать изменение периода колебаний. Известно, что в трехмерных колебательных системах вследствие седловых решений вначале наблюдается кратное увеличение периода колебаний [3]. Замкнутые траектории существуют в случае особой точки неустойчивого фокуса, в случае устойчивого фокуса траектория притягивается в особую точку. Величина параметра связки между осцилляторами ε также сказывается на характере колебательного движения. Однако при образовании замкнутой фазовой траектории доминирующая роль принадлежит параметрам μ, ν.

На рис. 3 приведены портреты предельных циклов и временная реализация при значениях параметров (μ ; ν ; ε) = (2; 5; 0,9).

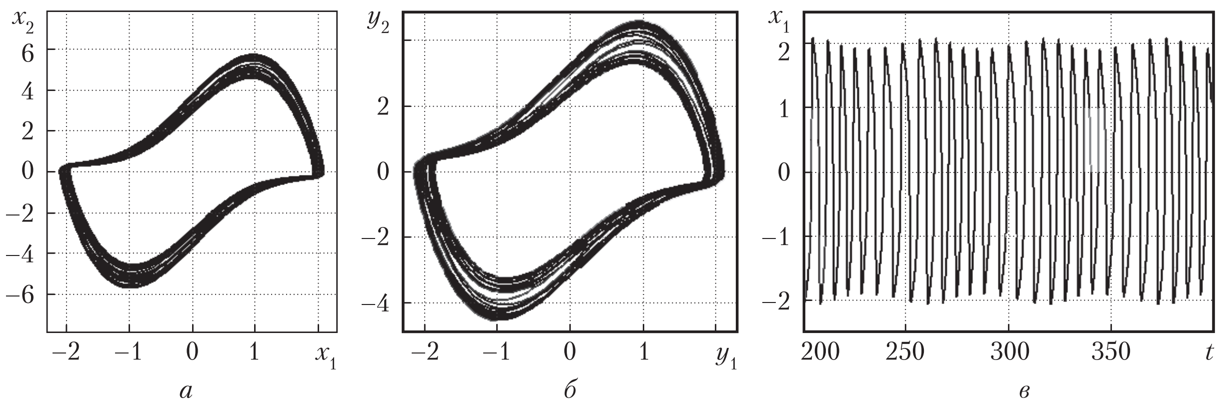

Рис. 2

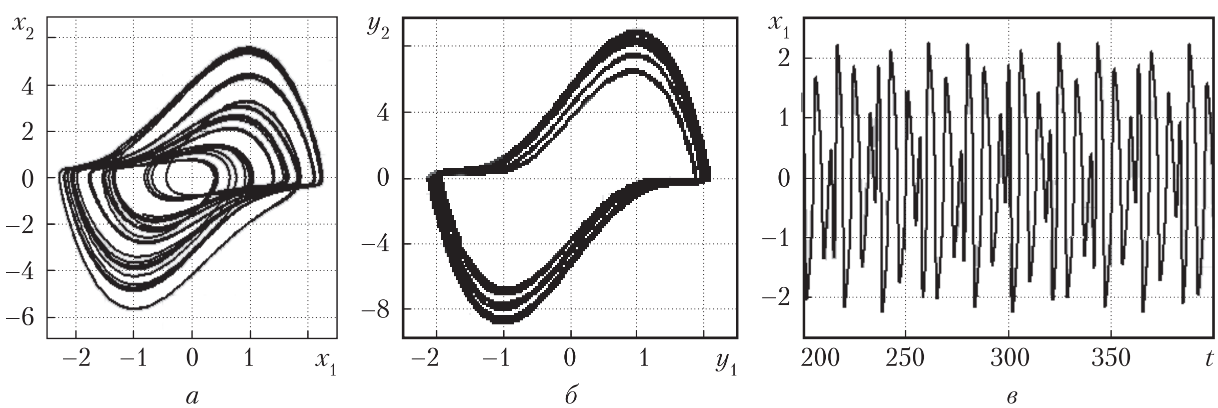

Рис. 3

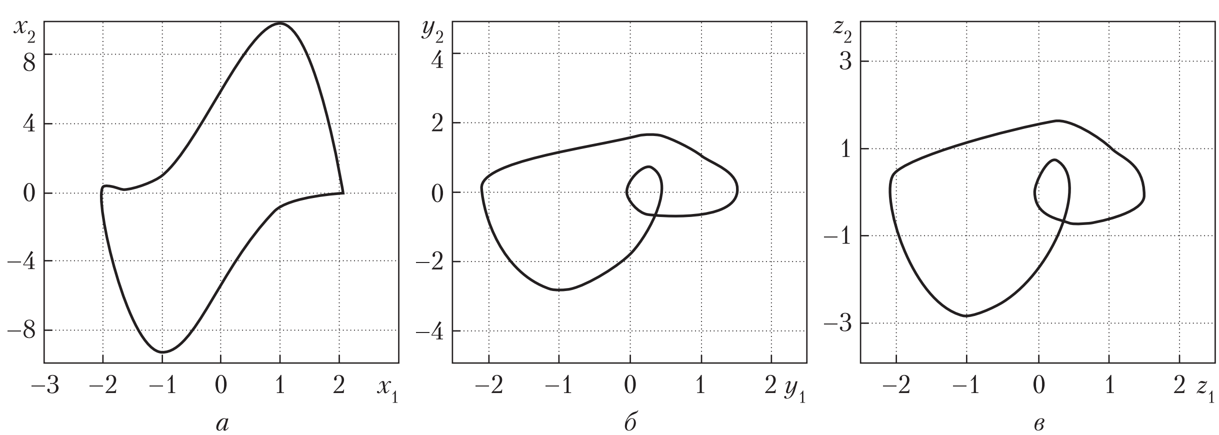

Рис. 4

Пример 2. Расмотрим систему трех уравнений Ван дер Поля на плскостях x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2, связанных между собой:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=\mu(1-x_1^2)x_2-x_1+\varepsilon(y_1-x_1); \tag{11}$$

$$\frac{dy_1}{dt}=y_2,\quad \frac{dy_2}{dt}=\nu(1-y_1^2)y_2-y_1+\varepsilon(x_1-y_1); \tag{12}$$

$$\frac{dz_1}{dt}=z_2,\quad \frac{dz_2}{dt}=\nu(1-z_1^2)z_2-z_1+\varepsilon(x_1-z_1)\,. \tag{13}$$

Принимая значения параметров (μ; ν; ε) = (6; 1; 1) в связке (11)—(13), получим как кососимметричные замкнутые фазовые портреты, так и портрет наподобие условно-периодических движений (рис. 4).

О передаче сигнала через цепочку связанных осцилляторов: в некоторых случаях такая геометрическая проблема можеть иметь практическое значение. При исследовании динамики систем важной характеристикой являются характеристические показатели Ляпунова. Система в вариациях $dx\,/\,dt=A(t)x$ рассматривается в виде $d\delta x\,/\,dt=A(\overline{x})\delta x$, где $A(\overline{x})$ — матрица, коэффициенты которой зависят от частного решения x. При помощи системы в вариациях можно получить представление о поле, в котором движется изображающая точка системы, и установить качество решений на траектории. Для цепочки связанных нелинейных осцилляторов с доминирующей близостью параметров μ; ν; ϑ возможна кососимметрия замкнутых траекторий для каждого осциллятора. В некоторых случаях идентификация аттрактора с помощью принципа кососимметрии не применима. В примере 2 показано замыкание и кососимметрию траектории лишь на отдельных элементах связки.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Nikitina N.V. Bifurcations in Reference Models of Multidimensional Systems. *Int. Appl. Mech.* 2018. **54**, № 6. P. 702—709.
2. Nemytskii V.V. and Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equation. Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. 550 p.
3. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. Киев: Феникс, 2012. 235 с.
4. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов Ф.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. Москва: Физматгиз, 1995. 336 с.
5. Никитина Н. В. Принцип симметрии в трехмерных системах *Допов. Нац. акад, наук Украини.* 2017. № 7. С. 21—28. https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.021

Поступило в редакцию 30.08.2019

REFERENCES

1. Nikitina, N. V. (2018). Bifurcations in Reference Models of Multidimensional Systems. Int.Appl.Mech., 54, No. 6, pp. 702-709.
2. Nemytskii, V. V. & Stepanov, V. V. (1960). Qualitative Theory of Differential Equation. Princeton: Princeton Univ. Press.
3. Nikitina, N. V. (2012). Nonlinear systems with complex and chaotic behavior of trajectories. Kyiv: Phenix (in Russian).

4. Mishchenko, E. F., Kolesov, Yu. S., Kolesov, F. Yu. & Rozov, N. Kh. (1995). Periodic movements and bifurcatioln in a singular disturbet systems. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
5. Nikitina, N. V. (2017). The principle of symmetry in tree-dimensional systems. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 7, pp. 21-29 (in Russian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.021

Received 30.08.2019

Н.В. Нікітіна, О.Ю. Талімонова

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

БІФУРКАЦІЇ ПОВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ З ПОДІБНОЮ КІНЕМАТИКОЮ

Аналізується застосування принципу кососиметрії для нелінійних систем, які представляють зв'язку нелінійних осциляторів Ван дер Поля. Зв'язка осциляторів може (в залежності від параметрів) утворювати системи зв'язаних регулярних граничних циклів і зв'язаних атракторів з хаотичною, або умовно-періодичною намоткою траєкторії. При слабкій зміні параметрів осциляторів змінюється масштаб двох циклів. Сильні зміни параметрів та коефіцієнта зв'язки зумовлюють появу граничних циклів з хаотичною намоткою траєкторії. При розгляді трьох зв'язаних граничних циклів можна звести їх до двох з періодичною обмоткою і одного граничного циклу з умовно-періодичною намоткою. Для уточнення характеру обстеження траєкторії слід зробити топологічний аналіз. У цьому випадку складають рівняння в варіаціях і знаходять характеристичні показники розв'язків.

Ключові слова: *нелінійна система, біфуркація, принцип кососиметрії.*

N.V. Nikitina, O.Yu. Talimonova

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: center@inmech.kiev.ua

BIFURCATIONS OF COUPLED NONLINEAR OSCILLATORS WITH SIMILAR KINEMATICS

The application of the principle of skew symmetry for nonlinear systems that represent a bunch of nonlinear Van der Pol oscillators is analyzed. A bunch of oscillators can (depending on the parameters) form systems of coupled regular limiting cycles and coupled attractors with chaotic or conditionally periodic winding of the trajectory. At a slight change in the parameters of oscillators, the scale of two limiting cycles changes. A strong change in the parameters and the coupling coefficient leads to the appearance of limiting cycles with chaotic winding of the trajectory. When considering three connected limiting cycles, one can reduce them to two ones with a periodic winding and one limiting cycle with a conditionally periodic winding. To clarify the nature of the winding of the trajectories, a topological analysis of the trajectory should be done. In this case, the equations in variations are constructed, and the characteristic indicators of solutions are found.

Keywords: *nonlinear system, bifurcation, principle of skew symmetry.*