

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.028>

УДК 539.421

**М.Ф. Селіванов,
Є.Р. Кульбачний, Д.Р. Онищенко**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка, НАН України, Київ
E-mail: mfs@ukr.net, jeniakulb@gmail.com, donishenko@kse.org.ua

Дослідження зміни концентрації напружень з часом у в'язкопружному ортотропному тілі

Представлено академіком НАН України Я.М. Григоренком

Викладено процедуру розв'язання плоскої задачі лінійної теорії в'язкопружності методом скінченних елементів. На основі принципу віртуальної роботи та припущення про сталість швидкості деформацій на малих проміжках часу записано матричну форму рівнянь рівноваги скінченно-елементної апроксимації тіла. Процедуру розв'язання описано для визначальних співвідношень в інтегральній формі Больцмана—Вольтерра. Цей інтеграл перетворюється до інкрементної форми на часовій сітці, на кожному інтервалі якої задача розв'язується методом скінченних елементів з невідомими приростами переміщень. Числову процедуру побудовано за нерівномірного розбиття інтервалу часу, на якому проводиться дослідження. В цьому випадку матриця жорсткості потребує переобчислення на кожному часовому кроці. Функції релаксації модулів в'язкопружного ортотропного матеріалу описано у формі ряду Проні—Діріхле. Представлено розв'язок задачі про визначення зміни з часом концентрації напружень в тілі з круглим отвором у в'язкопружній ортотропній пластині. Для побудови числового розв'язку три модулі ортотропного матеріалу записано з допомогою однієї експоненти з тим самим часом релаксації. Для цих вихідних даних побудовано аналітичний вираз для в'язкопружних компонент матриці жорсткості ортотропної пластини в умовах плоского напруженого стану. Числові приклади представлено для декількох співвідношень радіуса отвору та розміру пластини. Ці результати зіставлені з розв'язком, отриманим для нескінченної пластини шляхом оберненого перетворення числовим методом відомого аналітичного розв'язку пружної задачі.

Ключові слова: концентрація напружень, в'язкопружна ортотропна пластинка, інкрементне в'язкопружне формулювання, метод скінченних елементів

Вступ і постановка задачі. В'язкопружні матеріали, такі як твердопаливні речовини, полімери і композити на їх основі, все частіше використовуються в промисловості. Як відомо, властивості в'язкопружних матеріалів є спадковими. Механічна поведінка в задачах в'язкопружності залежить як від поточного моменту часу так і від всієї історії. Дуже часто рівень напружень є порівняно низьким, час завантаження не є тривалим. Механічні власти-

Цитування: Селіванов М.Ф., Кульбачний Є.Р., Онищенко Д.Р. Дослідження зміни концентрації напружень з часом у в'язкопружному ортотропному тілі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 10. С. 28–34. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.028>

вості багатьох в'язкопружних матеріалів дуже часто можна змоделювати в рамках лінійної теорії в'язкопружності.

Існують два основних типи підходів до визначення напружено-деформованого стану в лінійному в'язкопружному середовищі. Перший використовує класичний принцип відповідності між пружністю та в'язкопружністю [1]. Однак через складну структуру розв'язання задачі теорії пружності ускладнюється перехід із області перетворення, внаслідок чого аналітичні розв'язки є обмеженими лише деякими простими задачами. Для складних задач визначення напружено-деформованого стану у лінійно в'язкопружному тілі, розв'язок часто отримується за допомогою числового оберненого перетворення [2–4].

У якості другого підходу використовується числовий метод визначення напружено-деформованого стану. Метод скінченних елементів — один із найпоширеніших обчислювальних методів. Він успішно використовується і для розв'язання в'язкопружних задач [5, 6]. Рівняння зв'язку між напруженнями та деформаціями записуються в інтегральній формі, що включає функції релаксації, та перетворюються до інкрементної форми для імплементації в розрахункову схему методу скінченних елементів. Реалізація підходу значно спрощується за умов ізотопії матеріалу. Для такої постановки розв'язано багато задач про деформування та руйнування конструкцій з в'язкопружних матеріалів. Водночас майже немає ілюстрацій підходу у випадку в'язкопружного ортотропного матеріалу.

В даній роботі у рамках другого підходу розв'язано задачу про зміну з часом концентрації напружень в точці контуру круглого отвору у скінченній в'язкопружній ортотропній пластині. Числові розв'язки порівняно з результатами, отриманими в рамках першого підходу для нескінченної пластини.

Розрахунки проведемо для квадратної пластини зі стороною $2A$ з центральним круговим отвором радіуса R . Пластину в умовах плоского напруженого стану (з одиничною товщиною) навантажено розтягувальним навантаженням p . Об'ємні сили відсутні. Матеріал вважаємо ортотропним лінійно в'язкопружним із залежними від часу модулями E_{11} , E_{22} , ν_{21} та G_{12} . Тіло знаходиться в однорідному температурному полі, переміщення є малими.

В силу симетрії отримаємо розв'язок для чверті пластини Ω , яка зображена на рис. 1. Прийемо, що на частині поверхні тіла $\partial_1\Omega$ задано переміщення \hat{u}_i , а на частині $\partial_2\Omega$ прикладені поверхневі сили T_i . Система рівнянь для визначення напружено-деформованого стану тіла:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad x_i \in \Omega, \\ u_i &= \hat{u}_i, \quad x_i \in \partial_1\Omega, \\ \sigma_{ij,j}n_j &= T_i, \quad x_i \in \partial_2\Omega, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} * \varepsilon_{kl}, \end{aligned}$$

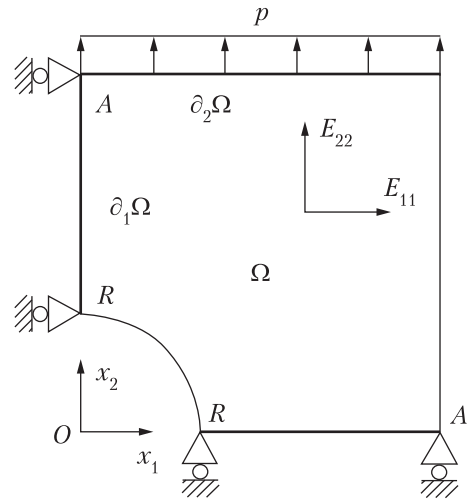


Рис. 1

де σ_{ij} , ε_{ij} і C_{ijkl} — компоненти тензорів напружень, деформацій та функцій релаксації; $*$ — оператор згортки; u_i , T_i та n_i — компоненти векторів переміщень, поверхневих сил та одиничного вектора нормалі до поверхні тіла,

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 &= 0, & x_1 \in [R, A], & & x_2 &= 0, \\ \hat{u}_1 &= 0, & x_2 \in [R, A], & & x_1 &= 0, \\ T_2 &= p, & x_1 \in [0, A], & & x_2 &= A. \end{aligned}$$

Розв’язання задачі. Вважатимемо лінійно в’язкопружним матеріал, для якого співвідношення між напруженнями та деформаціями мають форму Больцмана—Вольтерра

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau).$$

Приймаємо, що функції релаксації матеріалу можна визначити в формі ряду Проні—Діріхле

$$C_{ijkl}(t) = E_{ijkl}^{\infty} + \sum_m E_{ijkl}^{(m)} \exp\{-t / \rho_{ijkl}^{(m)}\}$$

(без сумування за індексами, що повторюються).

Для імплементації в’язкопружної моделі в розрахункову схему метода скінченних елементів запишемо приріст напружень на часовому інтервалі (t_{n-1}, t_n)

$$\Delta \sigma_{ij}^{(n)} \equiv \sigma_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n-1)} = -\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} + \hat{\sigma}_{ij}^{(n)}, \quad \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}(t_n), \quad n = 1, \dots$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} &= - \int_{-\infty}^{t_{n-1}} [C_{ijkl}(t_n - \tau) - C_{ijkl}(t_{n-1} - \tau)] d\varepsilon_{kl}(\tau), \\ \hat{\sigma}_{ij}^{(n)} &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} C_{ijkl}(t_n - \tau) d\varepsilon_{kl}(\tau). \end{aligned}$$

Якщо навантаження прикладено миттєво в момент часу t_0 ,

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} = -[C_{ijkl}(t_1) - C_{ijkl}(t_0)] \varepsilon_{kl}^{(0)},$$

причому нульовий верхній індекс в дужках відповідає миттєвому (пружному) розв’язку задачі.

За відсутності об’ємних сил та незмінного з часом зовнішнього навантаження, застосуємо для елемента інкрементну форму принципу віртуальної роботи

$$\int_{\Omega^e} \sigma_{ij}^{(n)} \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} dV = \int_{\partial \Omega^e} T_i \delta u_i^{(n)} dS, \quad (1)$$

де δ — варіаційний оператор, Ω^e і $\partial \Omega^e$ — область елемента та границя, на якій прикладено поверхневі сили, відповідно; $\varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}(t_n)$, $u_i^{(n)} = u_i(t_n)$ — деформації та переміщення в момент часу t_n ; T_i — незмінні з часом поверхневі сили,

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}, \quad u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)} + \Delta u_i^{(n)}.$$

Прийmemo

$$\delta\varepsilon_{ij}^{(n)} = \delta(\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}), \quad \delta u_i^{(n)} = \delta(\Delta u_i^{(n)}),$$

і підставимо ці вирази в (1). Швидкості деформацій на кожному інтервалі часу (t_{n-1}, t_n) покладемо сталими: $d\varepsilon_{ij}(t)/dt = \Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \delta(\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}) \tilde{E}_{ijkl}^{(n)} \delta(\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)}) dV &= \int_{\partial\Omega^e} \delta(\Delta u_i^{(n)}) T_i dS, \\ - \int_{\Omega^e} \sigma_{ij}^{(n-1)} \delta(\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}) dV &+ \int_{\Omega^e} \tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} \delta(\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}) dV, \end{aligned}$$

де введено позначення (без сумування за індексами, що повторюються)

$$\tilde{E}_{ijkl}^{(n)} = E_{ijkl}^{\infty} + \sum_m \eta_{ijkl}^{(m,n)} (1 - \zeta_{ijkl}^{(m,n)}),$$

$$\zeta_{ijkl}^{(m,n)} = \exp\{-\Delta t_n / \rho_{ijkl}^{(m)}\}, \quad \eta_{ijkl}^{(m,n)} = E_{ijkl}^{(m)} \rho_{ijkl}^{(m)} / \Delta t_n.$$

Перейдемо до матричної форми запису. Визначивши поле інкременту переміщень $\Delta \mathbf{u}^{(n)}$ в елементі через інкремент переміщень у вузлах $\Delta \mathbf{q}^{(n)}$, а також відповідні деформації $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$

$$\Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{q}^{(n)}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{q}^{(n)},$$

отримаємо розв'язуюче рівняння для елемента

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{F}^t - \mathbf{F}^{(n-1)} + \tilde{\mathbf{F}}^{(n)},$$

де

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{E}}^{(n)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{q}^{(n)} dV$$

$$\mathbf{F}^t = \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N} \mathbf{T} dS, \quad \mathbf{F}^{(n)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{(n)} dV, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(n)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} dV$$

$$\tilde{\sigma}_i^{(n)} = \sum_m \sum_k (1 - \zeta_{ik}^{(m,n)}) S_{ik}^{(m,n)}$$

$$S_{ik}^{(m,1)} = E_{ik}^{(m)} \varepsilon_k^{(0)};$$

$$S_{ik}^{(m,n)} = \zeta_{ik}^{(m,n-1)} S_{ik}^{(m,n-1)} + \eta_{ik}^{(m,n-1)} (1 - \zeta_{ik}^{(m,n-1)}) \Delta \varepsilon_k^{(n-1)}, \quad n = 2, \dots$$

(сумування за повторними індексами не проводимо).

Таким чином, величини $S_{ik}^{(m,n)}$ рекурентно визначаються в точках інтегрування на кожному часовому інтервалі. Матриця \mathbf{K} не потребує переобчислення для кожного n за рівномірного розбиття інтервалу часу, на якому проводиться дослідження.

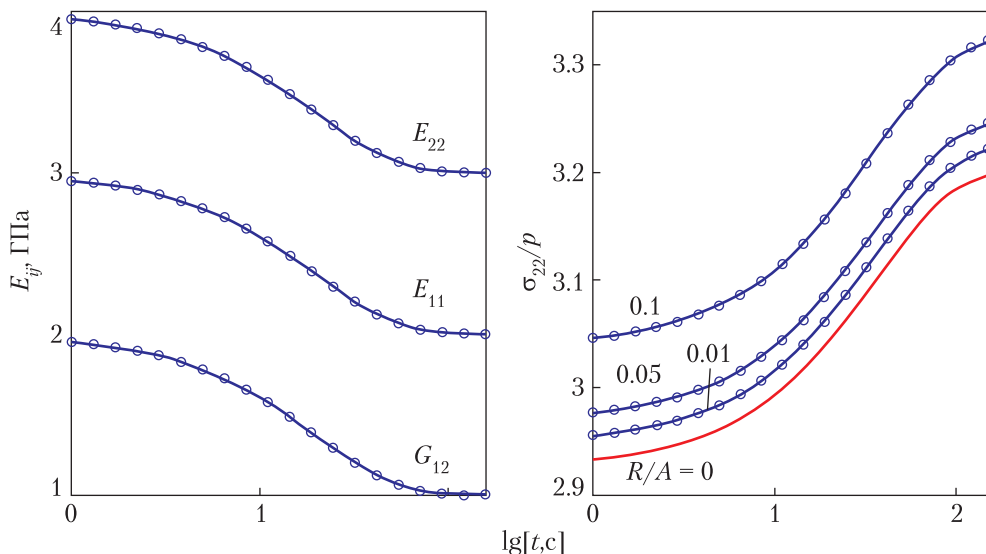


Рис. 2

Числові результати. Дослідимо зміну з часом концентрації напружень біля кругового отвору в ортотропній пластині. Для ортотропного матеріалу з головними осями, напрямленими вздовж осей координат, матриця, що пов'язує напруження і деформації в задачі теорії пружності, у випадку плоского напруженого стану має вигляд

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_{11} & \nu_{12}E_{22} & 0 \\ \nu_{21}E_{11} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \end{bmatrix}, \quad \nu_{12}E_{22} = \nu_{21}E_{11}. \quad (2)$$

Побудуємо в'язкопружний аналог цієї матриці. Розглянемо випадок, коли кожен з модулів E_{11} , E_{22} , G_{12} задано однією експоненціальною функцією з тим самим часом релаксації:

$$\begin{aligned} E_{11}(t) &= E_1^\infty + E_1^1 \exp\{-t/\rho\}, & E_{22}(t) &= E_2^\infty + E_2^1 \exp\{-t/\rho\}, \\ G_{12}(t) &= G^\infty + G^1 \exp\{-t/\rho\}, & \nu_{21} &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3)$$

В цьому випадку легко знайти в'язкопружний аналог матриці $\mathbf{D} = [D_{ij}]$. Для цього підставимо в (2) перетворення Лапласа—Карсона відповідних модулів. Обернене перетворення дає

$$\begin{aligned} D_{11}(t) &= \frac{E_1^\infty E_2^\infty}{E_\alpha^\infty} + \frac{E_1^1 E_2^1}{E_\alpha^1} \exp\left\{-\frac{t}{\rho}\right\} - \frac{\alpha(E_2^0 E_1^\infty - E_1^1 E_2^\infty)^2}{E_\alpha^\infty E_\alpha^1 E_\alpha^0} \exp\left\{-\frac{E_\alpha^\infty t}{E_\alpha^0 \rho}\right\}, \\ D_{22}(t) &= \frac{(E_2^\infty)^2}{E_\alpha^\infty} + \frac{(E_2^1)^2}{E_\alpha^1} \exp\left\{-\frac{t}{\rho}\right\} - \frac{\alpha^2(E_2^0 E_1^\infty - E_1^1 E_2^\infty)^2}{E_\alpha^\infty E_\alpha^1 E_\alpha^0} \exp\left\{-\frac{E_\alpha^\infty t}{E_\alpha^0 \rho}\right\}, \end{aligned}$$

$$D_{12}(t) = \nu_{21} D_{11}(t), \quad D_{33}(t) = G_{12}(t),$$

де

$$\begin{aligned} E_{\alpha}^0 &= E_2^0 - \alpha E_1^0, & E_{\alpha}^{\infty} &= E_2^{\infty} - \alpha E_1^{\infty}, & E_{\alpha}^1 &= E_2^1 - \alpha E_1^1, & \alpha &= \nu_{21}^2, \\ E_1^0 &= E_1^{\infty} + E_1^1, & E_2^0 &= E_2^{\infty} + E_2^1. \end{aligned}$$

Для побудови сітки методу скінченних елементів використано десятиточкові трикутні елементи з ущільненням вздовж контуру отвору (обрано 90 вершин елементів вздовж контуру та розмір елемента, що не перевищує 0.1).

На рис. 2 проілюстровані вихідні характеристики релаксації, відповідні числові розв'язки задачі та аналітичний розв'язок для нескінченної пластини. Останній для точки контуру на осі Ox для пружної задачі має вигляд

$$\sigma_{22} / p = 1 + \sqrt{\frac{E_{22}}{G_{12}} + 2 \left(\sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} - \nu_{21} \right)}.$$

Щоб отримати в'язкопружний розв'язок, підставимо замість пружних модулів відповідні перетворення Лапласа—Карсона, та повернемося в область оригінала за допомогою числового методу (процедура переходу детально описана в [3]).

Числові розв'язки отримано для наступних значень вихідних параметрів задачі: $E_1^0 = 3$ ГПа, $E_1^{\infty} = 2$ ГПа, $E_2^0 = 4$ ГПа, $E_2^{\infty} = 3$ ГПа, $G^0 = G^{\infty} + G^1 = 2$ ГПа, $G^{\infty} = 1$ ГПа, $\nu_{21} = 0,3$, $\rho = 20$ с. Для відношення радіуса отвору до розміру пластини рівному 0,01 різниця між числовим і аналітичним розв'язком склала менше відсотка.

Таким чином, в роботі проілюстровано ефективний алгоритм розв'язування задач лінійної в'язкопружності для ортотропних тіл за допомогою методу скінченних елементів. Вірогідність отриманих результатів підтверджено порівнянням із відомим класичним аналітичним розв'язком для нескінченного тіла.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. New York: Academic Press Inc, 1982.
2. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. On the long-term deformation process in viscoelastic composites around an elliptical hole. *Mech. Time-Depend. Mat.* 2016. **20**. № 6. P. 233–243. <https://doi.org/10.1007/s11043-016-9293-0>
3. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Yu.A. Subcritical growth of a mode III crack in a viscoelastic composite body. *Int. Appl. Mech.* 2013. **49**. № 3. P. 293-302. <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0567-9>
4. Kaminsky A.A., Selivanov M.F. A method for solving boundary-value problems of linear viscoelasticity for anisotropic composites. *Int. Appl. Mech.* 2003. **39**. № 11. P. 1294–1304. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000015599.90700.86>
5. Zocher M.A., Groves S.E., Allen D.H. A three-dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1997. **40**. № 12. P. 2267–2288. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970630\)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970630)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P)
6. Chazal C., Pitti R.M. Incremental constitutive formulation for time dependent materials: creep integral approach. *Mech. Time-Depend. Mat.* 2011. **15**. P. 239–253. <https://doi.org/10.1007/s11043-011-9135-z>

Надійшло до редакції 10.09.2020

REFERENCES

1. Christensen, R. M. (1982). Theory of viscoelasticity. New York: Academic Press Inc.
2. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2016). On the long-term deformation process in viscoelastic composites around an elliptical hole. Mech. Time-Depend. Mat., 20, No. 2, pp. 233-243, <https://doi.org/10.1007/s11043-016-9293-0>
3. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. A. (2013). Subcritical Growth of a Mode III Crack in a Viscoelastic Composite Body. Int. Appl. Mech., 49, No. 3, pp. 293-302, <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0567-9>
4. Kaminsky, A. A. & Selivanov, M. F. (2003). A method for solving boundary-value problems of linear viscoelasticity for anisotropic composites. Int. Appl. Mech., 39, No. 11, pp. 1294-1304, <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000015599.90700.86>
5. Zocher, M. A., Groves, S. E. & Allen, D. H. (1997). A three-dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. Int. J. Numer. Meth. Engng., 40, No. 12, pp. 2267-2288. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970630\)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970630)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P)
6. Chazal, C. & Pitti, R.M. (2011). Incremental constitutive formulation for time dependent materials: creep integral approach. Mech. Time-Depend. Mat., 15, pp. 239-253, <https://doi.org/10.1007/s11043-011-9135-z>

Received 10.09.2020

M.F. Selivanov, Y.R. Kulbachnyy, D.R. Onishchenko

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: mfs@ukr.net, jeniakulb@gmail.com, donishenko@kse.org.ua

DETERMINING THE STRESS CONCENTRATION CHANGE WITH TIME IN A VISCOELASTIC ORTHOTROPIC SOLID

The procedure for solving the plane problem of the linear theory of viscoelasticity by the finite element method is described. Based on the virtual work principle and the assumption of the constancy of the strain rate at small intervals of time, the matrix form of the equilibrium equations of the finite-element approximation of a body is written. The solution procedure is described for the constitutive relations in the Boltzmann–Volterra integral form. This integral is transformed into an incremental form on a time mesh, at each interval of which the problem is solved by the finite element method with unknown increments of displacements. The numerical procedure is constructed by ununiformly dividing the time interval, at which the study is conducted. In this case, the stiffness matrix requires recalculation at each time step. The relaxation functions of the moduli of a viscoelastic orthotropic material are described in the form of the Proni–Dirichlet series. The solution to the problem of determining the change over time of the stress concentration in a body with a round hole in a viscoelastic orthotropic plate is presented. To construct a numerical solution, the three moduli of orthotropic material were written using one exponent with the same relaxation time. For these initial data, an analytic expression for the viscoelastic components of the stiffness matrix of an orthotropic plate under plain stress conditions is constructed. Numerical examples are presented for several ratios of the hole radius to the size of the plate. These results are compared with the solution obtained for an infinite plate by inverse transformation by a numerical method of the well-known analytic elastic solution.

Keywords: *stress concentration, viscoelastic orthotropic plate, incremental viscoelastic formulation, finite element method.*