ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.019
УДК 519.8

Н.В. Семенова [1], М.М. Ломага [2], В.В. Семенов [1]

[1] Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
[2] ДВНЗ "Ужгородський національний університет"
E-mail: nvsemenova.@meta.ua,
marija_lomaga@ukr.net, semenov.jr@gmail.com

Існування розв'язків та метод розв'язання лексикографічної задачі опуклої оптимізації з лінійними функціями критеріїв

Представлено академіком НАН України І.В.Сергієнком

Серед векторних задач лексикографічні задачі утворюють досить широкий і важливий клас задач оптимізації. Лексикографічне впорядкування використовується для встановлення правил субординації й пріоритету. Тому значна кількість задач, в тому числі задачі оптимізації складних систем, задачі стохастичного програмування в умовах ризику, задачі динамічного характеру та ін., можна подати у вигляді лексикографічних задач оптимізації. Встановлено умови існування розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою множиною допустимих розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу опуклої допустимої множини, конусу, що лексикографічно впорядковує її відносно критеріїв оптимізації. Отримані умови можна успішно використовувати при розробці алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків зазначених задач лексикографічної оптимізації. На основі ідей методів лінеаризації та відтинаючих площин Келлі побудовано та обґрунтовано метод знаходження лексикографічно оптимальних розв'язків опуклих лексикографічних задач з лінійними функціями критеріїв.

Ключові слова: *лексикографічна оптимізація, векторний критерій, існування розв'язків, умови оптимальності, метод лінеаризації, метод відтинаючих площин Келлі.*

Лексикографічний підхід до розв'язання багатокритеріальних задач полягає в строгому ранжируванні критеріїв за відносною важливістю і дозволяє домогтися оптимізації більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за всіма іншими менш важливими критеріями. Найчастіше такі багатокритеріальні задачі зустрічаються при послідовному введенні додаткових критеріїв у звичайні скалярні задачі оптимізації, які можуть мати не єдиний розв'язок. Задачі лексикографічної оптимізації виникають також при моделюванні ієрархічних структур, у стохастичному програмуванні, при розв'язанні деяких задач динамічного характеру тощо [1—3].

Цитування: Семенова Н.В., Ломага М.М., Семенов В.В. Існування розв'язків та метод розв'язання лексикографічної задачі опуклої оптимізації з лінійними функціями критеріїв. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 12. С. 19—27. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.019

У лексикографічному вигляді можна подати також векторні задачі динамічного характеру, які полягають у послідовному досягненні часткових цілей. У лексикографічній постановці формулюються задачі оптимізації складних систем, які полягають із взаємозалежних підсистем, що відносяться до різних ієрархічних рівнів.

До можливих методів розв'язання таких задач відноситься використання схеми скаляризації або згортки векторного критерію для одноетапного розв'язання [1—6]. У [2] для відшукання лексикографічного оптимуму лінійних багатокритеріальних задач оптимізації було запропоновано використання симплекс-методу. У [4, 5] задача лексикографічної оптимізації з лінійними обмеженнями зводиться до послідовності лінійних лексикографічних задач шляхом апроксимації функцій критеріїв. У [6] представлено алгоритм, що дозволяє звести розв'язок вхідної задачі лексикографічної оптимізації за допомогою апроксимації допустимої множини до розв'язання послідовності лексикографічних задач лінійного програмування. В однокритеріальній оптимізації ряд алгоритмів пошуку екстремуму побудовано на використанні апарату теорії двоїстості. Це питання є цікавим і для задач багатокритеріальної оптимізації. У статті [7] досліджуються опуклі квадратичні задачі лексикографічної оптимізації на множині, заданій системою лінійних нерівностей, і питання побудови двоїстих до них задач. Двоїсті задачі до вхідної будуються за допомогою відображення Лагранжа, де множники Лагранжа — це векторні змінні, множиною значень кожної з яких є множина векторів простору, розмірність якого рівна кількості часткових критеріїв з введеним на ньому лексикографічним порядком.

Метою досліджень, представлених в даній статті, є встановлення умов існування оптимальних розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою допустимою множиною на основі використання властивостей рецесивного конуса опуклої допустимої множини [8], конуса, що лексикографічно її впорядковує відносно критеріїв оптимізації [2], а також розробка та обґрунтування методу розв'язання лексикографічної задачі опуклої оптимізації з лінійними функціями критеріїв.

Постановка задачі. У критеріальному просторі R^ℓ вводиться бінарне відношення лексикографічного порядку векторів $z=(z_1, z_2, \ldots, z_\ell)$ і $z'=(z'_1, z'_2, \ldots, z'_\ell)$ таке, що $z \geqslant^L z' \Leftrightarrow (z=z') \vee (\exists j \in N_\ell : \forall i \in N_{j-1}\ (z_j > z'_j, z_i = z'_i))$, де $N_0 = \varnothing$.

Розглянемо задачу лексикографічної оптимізації наступного вигляду:

$$Z_L(F, X): \quad \max{}^L \{F(x) \mid x \in X\},$$

де $F(x)=(f_1(x), \ldots, f_\ell(x))$, $\ell \geqslant 2$, $f_k(x)=\langle c_k, x\rangle$, $c_k \in R^n$, $k \in N_\ell = \{1, 2, \ldots, \ell\}$, $X=\{x \in R^n \mid g^i(x) \leqslant 0,\ x \geqslant 0, i \in N_m\}$, $g^i(x), i \in N_m$, — опуклі функції. В задачі лексикографічної оптимізації часткові критерії впорядковані за важливістю. При цьому виникає поняття лексикографічного оптимуму.

Означення 1. Вектор x лексикографічно переважає вектор x', коли виконується одна з ℓ умов:

1) $f_1(x) > f_1(x')$;

2) $f_1(x) = f_1(x')$, але $f_2(x) > f_2(x')$;

....

ℓ) $f_j(x) = f_j(x'), j = 1, \ldots, \ell-1$, але $f_\ell(x) > f_\ell(x')$.

Означення 2. Вектор x еквівалентний вектору x', коли за кожним критерієм вектори x та x' мають однакові оцінки, при цьому $x \neq x'$.

Під розв'язанням задачі $Z_L(F,X)$ будемо розуміти пошук елементів множини $L(F,X)$ лексикографічно оптимальних розв'язків, яку задамо в такий спосіб:

$$L(F,X) = \{x \in X \,|\, \upsilon(x,F,X) = \varnothing\},$$

де $\upsilon(x,F,X) = \{x' \in X \,|\, \exists j \in N_\ell : f_j(x') > f_j(x) \wedge j = \min\{i \in N_\ell : f_i(x') \neq f_i(x)\}\}$.

Безпосередньо з означення лексикографічно оптимальних розв'язків випливає, що множину $L(F,X)$ можна задати за допомогою рекурентних співвідношень Таким чином,

$$L_i(F,X) = \operatorname{Arg\,max}\{f_i(x) : x \in L_{i-1}(F,X), \quad i \in N_\ell, \tag{1}$$

де $\operatorname{Arg\,max}\{\cdot\}$ — множина всіх оптимальних розв'язків відповідної задачі максимізації, $L_0(F,X) = X$, $L_\ell(F,X) = L(F,X)$.

Із співвідношень (1) випливає, справедливість включень послідовності множин

$$X \supseteq L_1(F,X) \supseteq L_2(F,X) \supseteq \ldots \supseteq L_\ell(F,X) = L(F,X),$$

тобто кожен наступний частковий критерій звужує множину розв'язків, отриманих з урахуванням всіх попередніх часткових критеріїв.

Як відомо [1, 2], множина $L(F,X)$ може бути визначена, як результат розв'язання послідовності ℓ скалярних задач $Z_{L_i}(F,X), \quad i \in N_\ell$, опуклого програмування з лінійними цільовими функціями. Отже, задачу $Z_L(F,X)$ можна розглядати як задачу послідовної оптимізації.

Згідно з [2] введемо означення.

Означення 3. Вектор $z \in R^\ell$ називається лексикографічно додатним, якщо перший його ненульовий компонент у порядку зростання індексів компонент є додатним.

Будемо позначати лексикографічну додатність вектора $z \in R^\ell$ як: $z >^L 0$, тут $(>^L)$ — знак відношення лексикографічно більше.

Вектор $z \in R^\ell$ лексикографічно більше вектора $y \in R^\ell$ $z >^L y$, якщо вектор $(z-y)$ лексикографічно додатний, $(z-y) >^L 0$. При такому упорядкуванні будь-які два вектори однієї розмірності порівнювані між собою.

Отже, для будь-яких векторів $a, b \in R^\ell$ $a >^L b$, тоді й тільки тоді, коли існує $1 \leqslant i \leqslant \ell$, таке що $a_i > b_i$, і якщо $i > 1$, то $a_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, i-1$. Вектор a лексикографічно не менший за вектор b, $a \geqslant^L b$, якщо $a >^L b$ або $a = b$, $(\geqslant^L)$ — знак відношення лексикографічно не менший.

Означення 4. Розв'язок $x^* \in X$ задачі $Z_L(F,X)$ будемо називати лексикографічно оптимальним, якщо він не гірший будь-якого іншого допустимого розв'язку $y \in X$ в розумінні відношення $\geqslant^L$, тобто якщо $F(x^*) - F(y) \geqslant^L 0$.

Отже, для довільного $x \in X$ справедливе твердження

$$x \in L(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \,|\, F(y) >^L F(x)\} = \varnothing.$$

У лексикографічній задачі оптимізації досягають як завгодно малого приросту більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за іншими менш важливими критеріями.

З означення лексикографічно оптимального розв'язку задачі $Z_L(F,X)$ випливає справедливість таких властивостей.

Властивість 1. Якщо для допустимого розв'язку $x^0 \in X$ й $\forall x \in X \setminus \{x^0\}$ задачі $Z_L(F,X)$ виконується нерівність $f_1(x) < f_1(x^0)$, то $x^0 \in L(F,X)$.

Властивість 2. Якщо для допустимого розв'язку $x \in X$ задачі $Z_L(F,X)$ $\exists x' \in X \setminus \{x\}$ такий, що $f_1(x') > f_1(x)$, то $x \notin L(F,X)$.

Існування лексикографічно оптимальних розв'язків. Існування оптимальних розв'язків на допустимій множині X і структура множини оптимальних розв'язків залежать від властивостей порядку відношення переваги, структури допустимої області X, природи її елементів тощо. Згідно з [2] скінченність множини X є достатньою умовою існування оптимальних розв'язків лексикографічної задачі оптимізації. Також множина $L(F,X)$ не порожня, якщо множина векторних оцінок $Y = \{F(x) \mid x \in X\}$ обмежена і замкнена. Однак у випадку нескінченної допустимої області X множина лексикографічно оптимальних розв'язків може бути порожньою.

Актуальним є вивчення питань можливості розв'язання лексикографічних задач векторної оптимізації, у яких множина допустимих розв'язків необмежена і опукла.

Необмеженість опуклої множини X означає, що $0^+X \setminus \{0\} \neq \varnothing$, де $0^+X = \{y \in R^n \mid \forall x \in X : x + ty \in X, t \geqslant 0\}$ — рецесивний конус множини X.

Аналіз задачі $Z_L(F,X)$ проведемо з урахуванням властивостей рецесивного конусу 0^+X [8] й конусу $K^L = \{x \in R^n \mid Cx >^L 0\}$, що лексикографічно впорядковує допустиму множину відносно критеріїв оптимізації, який назвемо також конусом перспективних [9] лексикографічних напрямків задачі $Z_L(F,X)$, оскільки перехід з будь-якої точки $x_1 \in R^n$ в точку $x_2 = x_1 + y$, де y належить конусу K^L, приводить до нерівності $Cx_2 >^L Cx_1$, тобто до лексикографічного зростання значень векторного критерію задачі.

Конус K^L, є опуклим конусом напрямків лексикографічно додатних векторів і його можна подати у вигляді об'єднання множин, що не перетинаються:

$$K^L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_\ell,$$

де $K_1 = \{x \in R^n \mid c_1 x > 0\}$,

$$K_2 = \{x \in R^n \mid c_1 x = 0, c_2 x > 0\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$K_\ell = \{x \in R^n \mid c_1 x = 0, c_2 x = 0, \ldots, c_{\ell-1} x = 0, c_\ell x > 0\}.$$

Для довільного $x \in X$ істинне висловлювання [2]:

$$x \in L(F,X) \Leftrightarrow (x + K^L) \cap X = \varnothing. \tag{2}$$

Продовжуючи дослідження питань існування різних видів оптимальних розв'язків векторних задач оптимізації [10—13], розпочаті в роботі [2] для лексикографічних задач, розглянемо необхідні й достатні умови існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F,X)$.

У випадку опуклої замкненої необмеженої допустимої множини X задачі $Z_L(F,X)$ справедлива теорема.

Теорема 1. *Необхідною умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі* $Z_L(F,X)$ *є порожній перетин конуса* K^L *перспективних лексикографічних напрямків і рецесивного конуса* 0^+X *, тобто*

$$K^L \cap 0^+X = \varnothing\,. \tag{3}$$

Доведення. Припустимо від супротивного, що множина $L(F,X) \neq \varnothing$, але не виконується умова (3), тобто перетин конусів K^L та 0^+X не порожній: $K^L \cap 0^+X \neq \varnothing$. Тоді $\forall x \in X$ справедливі співвідношення:

$$(x+K^L)\cap X \supseteq (x+K^L)\cap(x+0^+X) = x+(K^L \cap 0^+X) \neq \varnothing\,.$$

Враховуючи формулу (2), можна зробити висновок, що множина $L(F,X)=\varnothing$. Але це суперечить умові теореми й тим самим доводить її справедливість.

Обернене твердження теореми в загальному випадку не вірне. У монографії [2, с.113] наведено приклад, у якому для допустимої множини X виконана умова (3), але множина її крайніх точок є необмеженою, і в результаті множина $L(F,X)=\varnothing$.

Напрямок лексикографічно додатного вектора будемо називати лексикографічно додатним напрямком.

Справедлива теорема [2, с.113].

Теорема 2. *Нехай* V *— непорожня множина крайніх точок опуклої замкненої множини* X *. Якщо* V *— обмежена множина, то множина* X *має лексикографічний максимум тоді й тільки тоді, коли вона обмежена за всіма лексикографічно додатними напрямками.*

В наших позначеннях за умов теореми 2 множина $L(F,X)$ не порожня тоді й тільки тоді, коли виконується умова (3).

У випадку опуклої необмеженої і багатогранної множини X справедливий наслідок з теореми 2 [2, с.114].

Наслідок. Замкнена опукла багатогранна множина X має лексикографічний максимум тоді й тільки тоді, коли вона обмежена за всіма лексикографічно додатними напрямками.

З теореми 1 та наслідку з теореми 2 випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 3. *Нехай допустима множина* X *задачі* $Z_L(F,X)$ *є замкненою опуклою багатогранною множиною. Необхідною і достатньою умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків цієї задачі є виконання рівності* (3).

Зазначимо, що умова багатогранності опуклої замкненої необмеженої множини X є істотною для ствердження того факту, що умова (3) є необхідною й достатньою умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F,X)$.

Метод відтинаючих площин розв'язання лексикографічних задач опуклої оптимізації. Знаходження розв'язків задачі $Z_L(F,X)$ можна звести до розв'язання послідовності лексикографічних задач лінійного програмування

$Z_L(F,X_p): \max^L\{F(x) \,|\, x \in X_p\}$ на багатогранній множині

$$X_p = \{x \in R^n \,|\, \langle \nabla g^i(x^j), x - x^j \rangle + g^i(x^j) \leqslant 0,\ x \geqslant 0,\ i \in N_m, j = 0,1,\ldots,p\},$$

$x^j \in R^n_+$, $R^n_+ = \{x \in R^n \,|\, x_i \geqslant 0, i \in N_n\}$, що містить допустиму область X вхідної задачі.

Твердження 1. *Справедливе включення* $X \subset X_p$.

Доведення. Справедливість включення випливає безпосередньо з побудови багатогранної множини X_p. Використовуючи властивості опуклої неперервно диференційовної функції $h(x)$ для будь-яких $x, y \in R^n$ справедлива нерівність

$$\langle \nabla h(x), x - y \rangle + h(x) \leqslant h(x). \tag{4}$$

Згідно (4) для деякого числа $p > 0$ й будь-яких $x^j \in R^n_+$, $j = 1, \ldots, p$, можна записати

$$\langle \nabla g^i(x^j), x - x^j \rangle + g^i(x^j) \leqslant g^i(x), \ i \in N_m, \ j = 0, 1, \ldots, p. \tag{5}$$

Оскільки для довільного $x \in X$ виконуються нерівності $g^i(x) \leqslant 0$, $i \in N_m$, то зі співвідношення (5) випливає виконання нерівностей

$$\langle \nabla g^i(x^j), x - x^j \rangle + g^i(x^j) \leqslant 0, \ i \in N_m, \ j = 0, 1, \ldots, p, \tag{6}$$

тобто $x \in X_p$, що й було потрібно довести.

Теорема 4. [2, с.190]. *Якщо векторна функція* F *досягає на множині* X_p *лексикографічного максимуму, то серед точок цього максимуму є крайня точка множини* X_p.

З теореми 4 випливає, що для розв'язання задачі $Z_L(F, X_p)$ можна використовувати симплексний алгоритм як алгоритм направленого перебору крайніх точок множини X_p.

Знаходження лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F, X_p)$ будемо здійснювати прямим (лексикографічним) пошуком [2], який зводиться до розв'язання задач максимізації $Z(f_s, X_p): \max\{f_s(x) \,|\, x \in X_p\}, s \in N_\ell$, в кожній з яких максимізується відповідна функція лексикографічно упорядкованого векторного критерію. Основна ідея запропонованого методу полягає в наступному. Якщо оптимальний розв'язок задачі $Z(f_s, X_p)$ є недопустимим в задачі $Z_L(F, X)$, то він виключається з наступного розгляду додаванням нового лінійного обмеження до обмежень задачі $Z(f_s, X_p)$. Таким чином, це обмеження має таку властивість, що відтинає недопустимий розв'язок, а також частину недопустимої області задачі $Z_L(F, X)$ із усіх наступних розглядів. Усі додані обмеження є правильними відтинаючими площинами, тобто такими, які не відсікають ніяку частину допустимої області опуклої задачі $Z_L(F, X)$. Якщо оптимальний розв'язок задачі $Z(f_s, X_p)$ належить множині X, і він єдиний оптимальний розв'язок на цій множині, то знайдений розв'язок — лексикографічно оптимальний для задачі $Z_L(F, X)$.

Позначимо $\mathrm{Fr}B$ підмножину граничних точок деякої множини B.

Алгоритм розв'язання задачі $Z_L(F, X)$

0-й крок. Нехай $s = 1$, $k = 0$. Вибираємо довільну точку $x^k \in \mathrm{Fr}\, X$. Будуємо багатогранник $X_k = \{x \in R^n \,|\, \langle \nabla g^i(x^k), x - x^k \rangle + g^i(x^k) \leqslant 0, \ x \geqslant 0, \ i \in N_m\}$

1. Розв'язуємо задачу

$$\max\{f_s(x) \,|\, x \in X_k\} \tag{7}$$

двоїстим симплекс алгоритмом. Нехай $x^{k+1} = \arg\max\{f_S(x) \,|\, x \in X_k\}$. Якщо $x^{k+1} \in X$, і x^{k+1} — єдиний оптимальний розв'язок на допустимій множині X, то $x^{k+1} = \arg\max\{f_s(x) \,|\, x \in X_k\}$, оскільки $X \subseteq X_k$. Задача $Z_L(F, X)$ розв'язана.

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2020. № 12

2. Якщо $x^{k+1} \in X$ і x^{k+1} — оптимальний розв'язок на допустимій множині X, покладемо $\bar{f}_s = f_s(x^{k+1})$, $s = s+1$, $X_{k+1} = \{x \in X_k \mid f_i(x) = \bar{f}_i,\ i = 1, 2, \ldots, s-1\}$ і переходимо до пункту 1.

Якщо $x^{k+1} \in X$, переходимо до пункту 3.

3. Визначаємо множину $I_{k+1} = \{i \mid g^i(x^{k+1}) > 0\}$ індексів обмежень задачі $Z_L(F, X)$, що порушуються в точці x^{k+1}. Будуємо багатогранник X_{k+1}, додавши до обмежень, що описують множину X_k нерівність $\langle \nabla g^i(x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle + g^i(x^{k+1}) \leqslant 0$, $i \in N_{k+1} = \{j \in I_{k+1} \mid g^j(x^{k+1}) = \max\limits_{i \in I_{k+1}} g^i(x^{k+1})\}$. Одержуємо нову багатогранну множину $X_{k+1} = \{x \in X_k \mid \langle \nabla g^i(x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle + g^i(x^{k+1}) \leqslant 0,\ i \in N_{k+1}\}$, переходимо до пункту 1, покладаючи $k = k+1$.

Для розв'язання допоміжних задач лінійної оптимізації вигляду (7) доцільно застосовувати двоїстий симплекс-метод [2], який дозволяє використовувати отриманий на попередньому кроці розв'язок як базисний для оновленої допустимої області.

Збіжність алгоритму встановлює наступна теорема.

Теорема 5. *Якщо функції $g^i(x)$, $i \in N_m$, — опуклі, неперервно диференційовні і задача $Z_L(F, X)$ має скінченний розв'язок, то послідовність точок, породжувана даним алгоритмом, збігається до лексикографічно оптимального розв'язку задачі $Z_L(F, X)$.*

Доведення. Якщо задача $Z_L(F, X)$ має скінченний лексикографічно оптимальний розв'язок x^*, то, починаючи з деякого номера p_0 послідовність точок $\{x^p\}$ міститься в обмеженій множині. Нехай $\{x^k\}$ — підпослідовність послідовності $\{x^p\}$, яка збігається до точки x^*. Розглянемо підпослідовність $\{x^t\}$ точок, для яких відтинаюча гіперплощина породжена відносно i-го обмеження $\langle \nabla g^i(x^t), x - x^t \rangle + g^i(x^t) \leqslant 0$, $i \in N_m$. Якщо на кожній ітерації додавати гіперплощину щодо найсильнішого ($i \in N_s$) обмеження, то, починаючи з деякого номера $k \geqslant k_0$ виконається обмеження $g^i(x^k) \leqslant 0$, тобто x^k належить множині допустимих розв'язків або підпослідовність $\{x^t\}$ нескінченна. У випадку, коли підпослідовність $\{x^t\}$ нескінченна, для кожного $t' > t$ виконується нерівність $\langle \nabla g^i(x^t), x^{t'} - x^t \rangle + g^i(x^t) \leqslant 0$, звідки згідно з нерівністю Коші—Буняковського одержуємо $g^i(x^t) \leqslant \left\| \nabla g^i(x^t) \right\| \left\| x^{t'} - x^t \right\|$. Враховуючи, що $\left\| x^{t'} - x^t \right\| \to 0, \left\| \nabla g^i(x^t) \right\| \to \left\| \nabla g^i(x^*) \right\|$ з останньої нерівності випливає $g^i(x^t) \to g^i(x^*) \leqslant 0$, тобто x^* — лексикографічно оптимальний розв'язок задачі $Z_L(F, X)$. З іншого боку, якщо $\bar{x}$ — оптимальний розв'язок задачі $Z_L(F, X)$, то на кожній ітерації алгоритму справедлива нерівність $F(x^t) \geqslant^L F(\bar{x})$, звідки при граничному переході випливає $F(x^*) \geqslant^L F(\bar{x})$. Отже, x^* — лексикографічно оптимальний розв'язок задачі $Z_L(F, X)$. Теорема доведена.

Побудова послідовності $\{x^k\}$ в запропонованому методі здійснюється таким чином, що кожна із точок x^k є недопустимою точкою для вхідної задачі. Тому процес обчислення не можна зупиняти навіть при досить великих значеннях s, лише тоді, коли одержимо допустиму точку. Збіжність до лексикографічно оптимального розв'язку алгоритм гарантує у тому випадку, коли допустима множина опукла.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Досліджені питання існування та оптимальності розв'язків опуклих задач лексикографічної оптимізації з лінійними функціями критеріїв на необмеженій допустимій множині. На основі проведеного аналізу зазначених задач з урахуванням властивостей конусів перспективних лексикографічних напрямків та рецесивних напрямків встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків досліджених задач. Отримані умови можна успішно використовувати при розробці алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків зазначених задач лексикографічної оптимізації. На основі ідей методів лінеаризації та відтинаючих площин Келлі [14] побудовано та обґрунтовано метод знаходження лексикографічно оптимальних розв'язків опуклих лексикографічних задач з лінійними критеріями.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. Москва: Сов. радио, 1975. 192 с.
2. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. 312 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Физматлит, 2007. 256 с.
4. Ломага М.М., Семенов В.В. Квадратичные задачи лексикографической оптимизации: свойства и решения. *Компьютерная математика*. 2013. № 2. С. 134—143.
5. Семенова Н.В., Ломага М.М., Семенов В.В. Алгоритм решения многокритериальных задач лексикографической оптимизации с выпуклыми функциями критериев. *Int. J. Inform. Theories and Applications*. **21**, № 3. 2014. P. 254—262.
6. Ломага М.М. Розв'язання задач лексикографічної оптимізації з лінійними функціями критеріїв на опуклій множині. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ*. 2015. №2 (27). С. 66—72.
7. Ломага М.М., Семенова Н.В. Квадратичні лексикографічні задачі оптимізації і відображення Лагранжа. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ*. 2019. № 2 (35). С. 127—133.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
9. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 171 с.
10. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Кононова А.А. Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ*. 1997. № 1. С. 3—10.
11. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ*. 2000. № 6. С. 39—46.
12. Сергієнко Т.І. Про існування парето-оптимальних розв'язків задачі векторної оптимізації з необмеженою допустимою областю. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. № 10. С. 27—31.
13. Лебєдева Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2003, № 10. С. 80—85.
14. Kelley I.E. The cutting plane method for solving convex programs. SIAM J. 1960. **8**. P. 703—712.

Надійшло до редакції 03.11.2020

REFERENCES

1. Podinovskyi, V. V. & Gavrilov, V. M. (1975). Optimization on the consistently applied criteria. Moscow: Sov. radio (in Russian).
2. Chervak, Yu. Yu. (2002). Optimization. Unimprovable choice. Uzhgorod: Nat. Univ., Uzhgorod (in Ukrainian).
3. Podinovskyi, V. V. & Nogin, V. D. (2007). Pareto-optimal solutions of multicriteria problems. 2-th publ. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
4. Lomaha, M. M. & Semenov, V. V. (2013). Quadratic problems of lexicographic optimization: properties and solving. Komp'yuterna mathematica. No 2, pp. 134-143 (in Ukrainian).
5. Semenova, N. V., Lomaha, M. M. & Semenov, V. V. (2014). Algorithm of solving of multicriteria lexicographic optimization problems with the convex functions of criteria. Int. J. Inform. Theories and Applications, 21, No. 3, pp. 254-262 (in Russian).

6. Lomaha, M. M. (2015). Solving lexicographic optimization problems with linear functions of criteria on a convex set. Uzhgorod Univ. Scientific Bulletin. Series: Mathematics and Informatics. No. 2 (27), pp. 70-75 (in Ukrainian).
7. Lomaha, M. M. & Semenova, N. V. (2019). Quadratic lexicographic problems of optimization and Lagrange's reflection. Uzhgorod Univ. Scientific Bulletin. Series: Mathematics and Informatics. No. 2 (35), pp. 127-133 (in Ukrainian).
8. Rockafellar, R. (1973) Convex analysis, Moscow: Mir (in Russian).
9. Sergienko, T. I., Kozeratskya, L. N. & Lebedeva, T. T. (1995). Investigation of stability and parametric analysis of discrete optimization problems. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian). 171 c.
10. Sergienko, I. V., Kozeratskaya, L. N. & Kononova, A. A. (1997). Stability and unboundedness of vector optimization problems. Cybernetics and Systems Analysis. 33, No. 1, pp. 1-7.
11. Sergienko, I. V., Lebedeva, T. T. & Semenova, N. V. (2000). Existence of solutions in vector optimization problems. Cybernetics and Systems Analysis. 36, No. 6, pp. 823-828.
12. Sergienko, T. I. (2015). Existence of Pareto-optimal solutions to the vector optimization problem with an unbounded feasible set. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 10, pp. 27-31 (in Ukrainian).
13. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2003). Optimality and solvability conditions in linear vector optimization problems with convex feasible region. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 10, pp. 80-85 (in Ukrainian).
14. Kelley, I. E. (1960). The cutting plane method for solving convex programs. SIAM J. 8, pp. 703-712.

Received 03.11.2020

N.V. Semenova [1], *M.M. Lomaha* [2], *V.V. Semenov* [1]

[1] V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] Uzhhorod National University, Uzhhorod
E-mail: nvsemenova.meta.ua, marija_lomaga@ukr.net, semenov.jr@gmail.com

EXISTENCE OF SOLUTIONS AND SOLVING METHOD
OF LEXICOGRAPHIC PROBLEM OF CONVEX OPTIMIZATION
WITH THE LINEAR FUNCTIONS OF CRITERIA

Among vector problems, the lexicographic ones constitute a broad significant class of problems of optimization. Lexicographic ordering is applied to establish rules of subordination and priority. Hence, a lot of problems including the ones of complex system optimization, of stochastic programming under a risk, of the dynamic character, etc. may be presented in the form of lexicographic problems of optimization. We have revealed the conditions of existence of solutions of multicriteria of lexicographic optimization problems with an unbounded set of feasible solutions on the basis of applying the properties of a recession cone of a convex feasible set, the cone which puts it in order lexicographically with respect to optimization criteria. The obtained conditions may be successfully used while developing algorithms for finding the optimal solutions of the mentioned problems of lexicographic optimization. A method of finding the optimal solutions of convex lexicographic problems with the linear functions of criteria is built and grounded on the basis of ideas of the method of linearization and the Kelley cutting plane method.

Keywords: *lexicographic optimization, vector criterion, existence of solutions, method of linearization, cutting plane method.*