

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.003>  
УДК 517.587

**В.Л. Макаров**, академік НАН України

Інститут математики НАН України, Київ  
E-mail: makarovimath@gmail.com

## Диференціальні рівняння вищих порядків, які мають поліноміальні розв'язки, пов'язані з класичними ортогональними поліномами

*Знайдено конструктивний алгоритм побудови диференціальних рівнянь вищих парних порядків, розв'язками яких є узагальнені класичні ортогональні поліноми. Для цих поліномів одержано явне зображення, тричленне рекурентне співвідношення та вигляд умов ортогональності залежно від відповідної функції розподілу. Наведено розв'язки відповідних резонансних рівнянь.*

**Ключові слова:** диференціальні рівняння вищих порядків, класичні ортогональні поліноми, поліноми Лежандра, Лагерра, Ерміта, співвідношення ортогональності, тричленне рекурентне співвідношення, резонансні рівняння.

Побудові та дослідженню диференціальних рівнянь вищих парних порядків, розв'язки яких є узагальненими класичними ортогональними поліномами, присвячено ряд робіт. Так, у статті [1] наведене двопараметричне диференціальне рівняння четвертого порядку, розв'язками якого є узагальнені поліноми Лагерра  $L_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , які для  $\beta = 0$  з точністю до множника  $(-1)^n n!$  збігаються з класичними поліномами Лагерра. Також у цій статті наведено однопараметричне диференціальне рівняння четвертого порядку, розв'язками якого є узагальнені поліноми Ерміта  $H_n^{(\beta)}(x)$ , які для  $\beta = 0$  збігаються з модифікованими поліномами Ерміта  $H_n^{(0)}(x) = 2^{n/2} H_n(\sqrt{2}x)$ . Проте варто зауважити, що в обох цих рівняннях від  $n$  залежить не тільки коефіцієнт перед функцією, а й коефіцієнти перед похідними. У роботі [2] вивчалися узагальнені поліноми Лежандра, Лагерра, Якобі, що задовольняють відповідне диференціальне рівняння четвертого порядку. У статті [3] досліджувалися узагальнені поліноми Лежандра та поліноми типу Лежандра, які задовольняють диференціальне рівняння шостого порядку і мають ряд властивостей, притаманних класичним ортогональним поліномам.

Усі диференціальні рівняння в [2, 3] мають вигляд

$$L_{2r}u(x) - \lambda_{2r}(n)u(x) = 0, \quad r = 2, 3, \quad (1)$$

Цитування: Макаров В.Л. Диференціальні рівняння вищих порядків, які мають поліноміальні розв'язки, пов'язані з класичними ортогональними поліномами. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 7. С. 3–9. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.003>

і коефіцієнти диференціального оператора  $L_{2r}$ ,  $2r$ -го порядку не залежать від параметра  $n$ , степеня полінома.

У даній роботі знайдено алгоритм побудови диференціальних рівнянь вигляду (1) з  $r > 3$ , розв'язками яких є узагальнені класичні ортогональні поліноми Лежандра та Лагерра. Цей алгоритм базується на використанні диференціальних рівнянь четвертого та шостого порядків, поліноміальні розв'язки яких збігаються і є узагальненими класичними ортогональними поліномами. У випадку узагальнених поліномів Лежандра в літературі були відомі такі рівняння з параметрами, і достатньо було вибрати параметри певним чином, щоб їх поліноміальні розв'язки збігалися. Проте у випадку узагальнених поліномів Лагерра в літературі були відомі тільки параметричні диференціальні рівняння четвертого порядку. Отже, перед тим як застосувати запропонований нами алгоритм, треба було знайти диференціальне рівняння шостого порядку, яке мало б за розв'язки ті самі узагальнені поліноми Лагерра, що й рівняння четвертого порядку. Ця додаткова проблема в даній роботі успішно подолана. Під узагальненими класичними ортогональними поліномами ми будемо розуміти лінійну комбінацію класичних ортогональних поліномів.

**1. Алгоритм побудови рівнянь довільних парних порядків з узагальненими класичними ортогональними поліномами.** Введемо позначення для двох базових диференціальних операторів, за допомогою яких будуються всі диференціальні рівняння парних порядків певного класу з розв'язками, пов'язаними з класичними ортогональними поліномами. Нехай оператори

$$A_{2r,n}u(x) = \sum_{p=0}^{2r-1} a_{2r,2r-p}(x) \frac{d^{2r-p}u(x)}{dx^{2r-p}} - \lambda_{2r}(n)u(x) = L_{2r}u(x) - \lambda_{2r}(n)u(x), \quad r = 2, 3,$$

мають серед своїх розв'язків одні й ті самі поліноми  $p_n(x)$ , що узагальнюють класичні ортогональні поліноми, отже, й однакові, з точністю до сталого множника, частинні розв'язки відповідних резонансних рівнянь першого роду  $v_n(x)$  (стосовно резонансних рівнянь, пов'язаних із класичними ортогональними поліномами, див. [4–6]).

Тоді:

1) оператори  $L_4, L_6$  комутують на множині поліномів  $p_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ;

2) рівняння

$$L_4L_6u(x) - \lambda_4(n)\lambda_6(n)u(x) = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

мають своїми розв'язками поліноми  $u(x) = p_n(x)$ , а відповідні резонансні рівняння першого роду

$$L_4L_6v(x) - \lambda_4(n)\lambda_6(n)v(x) = p_n(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

матимуть частинні розв'язки (див. [4–6])

$$v(x) = [\lambda_4'(n)\lambda_6(n) + \lambda_4(n)\lambda_6'(n)]^{-1} \frac{\partial p_n(x)}{\partial n}.$$

Узагальненням вищенаведених міркувань є таке твердження.

**Лема.** Усі рівняння

$$\prod_{i=1}^N L_4^{\alpha_i} L_6^{\beta_i} u(x) - \lambda_4(n)^{M_4} \lambda_6(n)^{M_6} u(x) = 0,$$

$$\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = M_4, \quad \sum_{i=1}^N \beta_i = M_6, \quad M_4, M_6 \in \mathbb{N} \cup 0,$$

мають спільні поліноміальні розв'язки  $u(x) = p_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Відповідні резонансні рівняння першого роду мають спільні частинні розв'язки

$$v(x) = \left[ \frac{\partial}{\partial n} \lambda_4(n)^{M_4} \lambda_6(n)^{M_6} \right]^{-1} \frac{\partial p_n(x)}{\partial n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Із цієї леми випливає, що для побудови диференціальних рівнянь вищих порядків (вище шостого) з розв'язками, які є узагальненими класичними ортогональними поліномами, достатньо знайти два рівняння четвертого та шостого порядків, що мають однакові поліноміальні розв'язки, які зображуються у вигляді лінійної комбінації класичних ортогональних поліномів.

**2. Диференціальні рівняння четвертого та шостого порядків, спільними розв'язками яких є узагальнені класичні ортогональні поліноми. Узагальнені поліноми Лежандра.** Оскільки диференціальні рівняння четвертого і шостого порядків, розв'язками яких є узагальнені поліноми Лежандра, відомі (див. [2, 3]), ми наведемо тільки самі рівняння та значення параметрів, для яких поліноміальні розв'язки цих рівнянь збігаються, а також деякі властивості згаданих розв'язків.

Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку

$$A_{4,n} y(x) = L_4 y(x) - \lambda_4(n) y(x) = (x^2 - 1)^2 \frac{d^4 y(x)}{dx^4} + 8x(x^2 - 1) \frac{d^3 y(x)}{dx^3} + (4\alpha + 12)(x^2 - 1) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 8\alpha x \frac{dy(x)}{dx} - \lambda_4(n) y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Як було показано в [2], за умови

$$\lambda_4(n) = 8\alpha n + (4\alpha + 12)n(n-1) + 8n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)$$

поліноміальними розв'язками цього рівняння будуть

$$y(x) = v_n(x) = \alpha P_n(x) - x \frac{d}{dx} P_n(x) + \frac{1}{2} n(n+1) P_n(x), \quad (2)$$

де  $P_n(x)$  – поліном Лежандра. Ці поліноміальні розв'язки є ортогональними у тому сенсі, що

$$(v_n, v_m) = \int_{-1}^1 v_n(x) v_m(x) dx + \frac{1}{\alpha} [v_n(-1) v_m(-1) + v_n(1) v_m(1)] =$$

$$= \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1} [2n^4 + 4n^3 + (8\alpha - 2)n^2 - (8\alpha + 4)n + 8\alpha^2],$$

і задовольняють рекурентне співвідношення

$$v_{n+1}(x) = A_n x v_n(x) - C_n v_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$A_n = \frac{(2n+1) \left[ \alpha + \frac{1}{2}(n+1)n \right]}{(n+1) \left[ \alpha + \frac{1}{2}(n-1)n \right]}, \quad C_n = \frac{n \left[ \alpha + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \right]}{(n+1) \left[ \alpha + \frac{1}{2}(n-1)n \right]},$$

$$A'_n = C'_n, \quad A_n - C_n = 1.$$

Тут  $\delta_{n,m}$  – символ Кронекера.

Зробимо зауваження, яке буде корисним для побудови тричленного рекурентного співвідношення для ортогональних поліномів, якщо є відомим їх зображення

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n k_{n,n-j} x^{n-j}, \quad n = 0, 1, \dots$$

У цьому випадку коефіцієнти тричленного рекурентного співвідношення

$$p_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

визначаються за формулами

$$\alpha_n = \frac{k_{n+1,n+1}}{k_{n,n}}, \quad \beta_n = \alpha_n \left( \frac{k_{n,n-1}}{k_{n,n}} - \frac{k_{n+1,n}}{k_{n+1,n+1}} \right),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{k_{n-1,n-1}} (\alpha_n k_{n,n-2} + \beta_n k_{n,n-1} - k_{n+1,n-1}),$$

в яких, на відміну від відповідних формул із [7] (див. с. 161, формули (7), (8)), використовуються тільки коефіцієнти поліномів.

Розглянемо таке диференціальне рівняння шостого порядку:

$$A_6 y(x) = L_6 y(x) - \lambda_6(n) y(x) = \sum_{p=0}^5 a_{6-p}(x) \frac{d^{6-p} y(x)}{dx^{6-p}} - \lambda_6(n) y(x) = 0,$$

$$a_6(x) = (x^2 - 1)^3, \quad a_5(x) = 18x(x^2 - 1)^2, \quad a_4(x) = 30(x^2 - 1)(3x^2 - 1),$$

$$a_3(x) = 120x(x^2 - 1), \quad a_2(x) = -24, \quad a_1(x) = 0,$$

яке є частинним випадком диференціального рівняння, розглянутого в роботі [3], коли  $A = B = -1$ ,  $C = 1$ . Його розв'язками за умови

$$\lambda_6(n) = (n-2)_3(n+1)_3$$

є ортогональні поліноми типу Лагранжа [3]

$$y(x) = K_n(x) = (n^2 + n - 2) / 2P_n(x) - x \frac{dP_n(x)}{dx}. \quad (3)$$

Тут  $(a)_n$  – символ Похгаммера. Із (2), (3) випливає, що для  $\alpha = -1$  буде мати місце співвідношення

$$K_n(x) = v_n(x).$$

Отже, буде справедливою лема, згідно з якою можна побудувати диференціальні рівняння будь-яких парних порядків із розв'язками (3), а також розв'язки відповідних резонансних рівнянь.

**Узагальнені поліноми Лагерра.** Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\begin{aligned} A_{4,n}y(x) = L_4y(x) - \lambda_4(n)y(x) = x^2 \frac{d^4y(x)}{dx^4} - 2x(x-2) \frac{d^3y(x)}{dx^3} + \\ + (x^2 - 10x) \frac{d^2y(x)}{dx^2} + (6x - 4) \frac{dy(x)}{dx} + \lambda_4(n)y(x) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (4)$$

Це рівняння є частковим випадком із [2] для  $R = 2$ . Як було показано в [2], за умови

$$\lambda_4(n) = -n(n+5)$$

поліноміальними розв'язками рівняння (4) будуть

$$v_n(x) = (n+2)L_n(x) + \frac{d}{dx}L_n(x), \quad (5)$$

де  $L_n(x)$  – поліном Лагерра. Згідно з [2], поліноми (5) є ортогональними в сенсі скалярного добутку

$$(v_n, v_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x)v_n(x)v_m(x)dx + \frac{1}{2}v_n(0)v_m(0) = \delta_{n,m}(n^2 + 5n + 6)$$

і задовольняють рекурентне співвідношення

$$v_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)v_n(x) - C_nv_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$A_n = -\frac{n+3}{(n+2)(n+1)}, \quad B_n = \frac{2n^3 + 11n^2 + 17n + 4}{(n+2)^2(n+1)}, \quad C_n = \frac{(n+3)^2n}{(n+2)^2(n+1)}.$$

Розглянемо таке однопараметричне сімейство диференціальних операторів шостого порядку:

$$\begin{aligned} A_{6,n}y(x) = L_6y(x) - \lambda_6(n)y(x) = x^3 \frac{d^6y(x)}{dx^6} - 3x^2(x-3) \frac{d^5y}{dx^5} + \\ + \left( 15x + \left( -\frac{a_{1,0}}{4} - 24 \right) x^2 + 3x^3 \right) \frac{d^4y(x)}{dx^4} + \left( (-a_{1,0} - 36)x + \left( \frac{a_{1,0}}{2} + 21 \right) x^2 - x^3 \right) \frac{d^3y(x)}{dx^3} + \\ + \left( -6 + \left( \frac{5a_{1,0}}{2} + 21 \right) x + \left( -\frac{a_{1,0}}{4} - 6 \right) x^2 \right) \frac{d^2y(x)}{dx^2} + a_{1,0} \left( 1 - \frac{3x}{2} \right) \frac{dy(x)}{dx} + \lambda_6(n)y(x). \end{aligned}$$

Нами доведено, що за виконання умови

$$\lambda_6(n) = -n(n-1)(n-2) + \left( \frac{a_{1,0}}{4} + 6 \right) n(n-1) - 3 \frac{a_{1,0}}{2} n$$

поліноміальними розв'язками однорідного диференціального рівняння з цим оператором є

$$K_n(x) = (n+2)L_n(x) + \frac{dL_n(x)}{dx}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

причому вони збігаються з (5). Отже, є справедливою лема, згідно з якою можна побудувати диференціальні рівняння будь-яких парних порядків із розв'язками (5), а також розв'язки відповідних резонансних рівнянь.

*Зауваження.* Автором побудовані однорідні рівняння четвертого і шостого порядків вигляду (1), поліноміальні розв'язки яких збігаються та є узагальненими поліномами Ерміта, але для них не існує тричленного рекурентного співвідношення, отже, вони не утворюють ортогональну систему.

*Робота підтримана грантом H2020-MSCA-RISE-2019, № 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology).*

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Hahn W. Über Orthogonalpolynome mit drei Parametern. *Deutsche Math.* 1939. 5. P. 273–278.
2. Krall A.M. Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. *Pr. Roy. Soc. Edinb.* 1981. 87 A. P. 271–288. <https://doi.org/10.1017/S0308210500015213>
3. Littlejohn L.L. The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials. *Quaest. Math.* 1982. 5. P. 255–265. <https://doi.org/10.1080/16073606.1982.9632267>
4. Макаров В.Л. Ортогональные многочлены и разностные схемы с точными и явными спектрами: дис. д-ра. физ.-мат. наук. Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко, Киев, 1976.
5. Gavrilyuk I., Makarov V. Resonant equations with classical orthogonal polynomials. I. *Укр. мат. журн.* 2019. 71, № 2. С. 190–209.
6. Gavrilyuk I., Makarov V. Resonant equations with classical orthogonal polynomials. II. *Укр. мат. журн.* 2019. 71, № 4. С. 455–470.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 296 с.

Надійшло до редакції 25.02.2020

#### REFERENCES

1. Hahn, W. (1939). Über Orthogonalpolynome mit drei Parametern. *Deutsche Math.*, 5, pp. 273-278.
2. Krall, A. M. (1981). Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. *Pr. Roy. Soc. Edinb.*, 87A, pp. 271-288. <https://doi.org/10.1017/S0308210500015213>
3. Littlejohn, L. L. (1982). The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials. *Quaest. Math.*, 5, pp. 255-265. <https://doi.org/10.1080/16073606.1982.9632267>
4. Makarov, V. L. (1976). Orthogonal polynomials and finite difference schemes with exact spectrum given in closed form (Extended abstract of Doctor thesis). Taras Shevchenko State University of Kyiv, Ukraine (in Russian).
5. Gavrilyuk, I. & Makarov, V. (2019). Resonant equations with classical orthogonal polynomials. I. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 71, No. 2, pp. 190-209.
6. Gavrilyuk, I. & Makarov, V. (2019). Resonant equations with classical orthogonal polynomials. II. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 71, No. 4, pp. 455-470.
7. Bateman, H. & Erdélyi, A. (1974). Higher transcendental functions. (Vol. 2). Moscow: Nauka (in Russian).

Received 25.02.2020

*V.L. Makarov*

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: makarovimath@gmail.com

HIGHER-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS  
WITH POLYNOMIAL SOLUTIONS ASSOCIATED  
WITH CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

A constructive algorithm for constructing differential equations of higher even orders is found, whose solutions are generalized classical orthogonal polynomials. For these polynomials, an explicit image, a three-term recurrence relation, and the appearance of orthogonality conditions with respect to the corresponding distribution function are obtained. The solutions of the corresponding resonance equations are given.

**Keywords:** *higher-order differential equations, classical orthogonal polynomials, Legendre, Laguerre, and Hermite polynomials, orthogonality relation, three-term recurrence relation, resonance equations.*