ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.022
УДК 519.21

Є.О. Лебєдєв, В.Д. Пономарьов

НТУ України “Київський політехнічний інститут”
E-mail: leb@unicyb.kiev.ua

Стаціонарний режим для системи масового обслуговування типу $M|M|c|c+m$ із сталою інтенсивністю повторів

Представлено членом-кореспондентом НАН України П.С. Кноповим

Розглядається двовимірний марковський процес $\{X(t), t \geqslant 0\}$, фазовий простір якого являє собою решітку в напівсмузі $S(X) = \{0, 1, \ldots, c+m\} \times Z_+$. Процес $\{X(t), t \geqslant 0\}$ описує обслуговування вимог у багатоканальній системі з повторними викликами та інтенсивністю повторів, яка не залежить від числа повторних викликів. Спочатку для моделі, що розглядається, знайдена умова ергодичності. Потім отримано матрично-векторне подання стаціонарного розподілу через параметри системи. Метод дослідження базується на апроксимації вихідної моделі за допомогою урізаної з подальшим переходом до границі.

Застосування отриманих результатів продемонстровано на числових прикладах, у яких наведена залежність блокуючої ймовірності та середньої величини черги в стаціонарному режимі від параметрів системи.

Ключові слова: *стаціонарний режим, система з повторними викликами, умова ергодичності, урізана модель, матрично-векторне подання.*

Системи масового обслуговування з повторними викликами використовуються при моделюванні телекомунікаційних систем, call центрів, комп’ютерних мереж та інших сучасних систем обробки інформації (за деталями можна звернутись до [1]). У класичних моделях систем масового обслуговування припускається, що вимога, яка надходить у зайняту систему, блокується і втрачається. Зустрічається й інший сценарій: заблокована вимога очікує на початок обслуговування у черзі. Однак часто алгоритм обслуговування не допускає очікування в черзі і заблокована вимога тимчасово залишає систему. Після випадкового періоду часу вона повертається і знову намагається отримати обслуговування. Така поведінка вимог і моделюється системами з повторними викликами.

Як правило, в системах з повторними викликами заблокована вимога приєднується до орбіти і звертається до обслуговуючих приладів через випадкові проміжки часу незалежно

Ц и т у в а н н я: Лебєдєв Є.О., Пономарьов В.Д. Стаціонарний режим для системи масового обслуговування типу $M|Mc|c+m$ із сталою інтенсивністю повторів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 7. С. 22—31. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.022

від інших вимог, що знаходяться на орбіті. Це означає, що інтенсивність потоку повторних викликів прямо пропорційна числу вимог на орбіті у поточний момент часу. Однак на практиці можливі випадки, коли потік повторних викликів є контрольованим і його інтенсивність не залежить від числа вимог на орбіті. Наприклад, у роботі [2] вивчались системи з повторними викликами і сталою інтенсивністю повторів, що було викликано необхідністю моделювання CSMA/CD протоколу. Автори робіт [3, 4] моделюють TCP трафік, використовуючи подібні моделі. Стала інтенсивність повторів інтерпретується як інтенсивність опитування заблокованих вимог: вільний прилад послідовно опитує заблоковані вимоги. Час, виділений на це обслуговуючому приладу, збігається з часом повтору.

У подальшому Арталего і Гомес-Корал [5]) запропонували вивчати $M|M|c|c$-системи із сталою інтенсивністю повторів використовуючи незалежні від рівня квазінародження і загибелі процеси (QBD процеси). Теорія таких процесів була розвинута Ньютсом [6] на основі аналітичних матричних методів. Результатом застосування QBD процесів є ефективні обчислювальні алгоритми для стаціонарних імовірностей. Такі алгоритми містить робота [5], в якій використано аналітичний матричний підхід, і робота [7], що основана на методі розкладу за спектром.

Як було зазначено вище, системи зі сталою інтенсивністю повторів широко використовуються для розв'язування практичних задач. При цьому значну користь можна мати від явних аналітичних представлень імовірносних характеристик, що описують процес обслуговування у таких моделях. Нажаль, явні формули для стаціонарних імовірностей були отримані лише у простих випадках [8]. Деякі рекурентні алгоритми для стаціонарних імовірностей $M|M|c|c+m$-систем наведені у [9]. Для простих часткових випадків $M|M|c|c+m$-систем час очікування початку обслуговування і період зайнятості було вивчено у роботі [10].

Робота, що пропонується, має таку структуру. По-перше, ми введемо процес обслуговування для $M|M|c|c+m$-системи і знайдемо умови його ергодичності. У подальшому ми отримаємо явне подання для стаціонарних імовірностей процесу обслуговування через параметри системи. Застосування отриманих результатів продемонстровано на чисельних прикладах, в яких проаналізована одна з головних інтегральних характеристик моделі.

Математична модель і умова ергодичності. Розглянемо систему з повторними викликами, яка має c однакових обслуговуючих приладів і m місць у черзі для очікування початку обслуговування. Вхідний потік вимог є пуассонівським з параметром λ. Якщо в момент надходження вимоги є вільний прилад, вона негайно починає обслуговуватись. Час обслуговування має експоненціальний розподіл з параметром ν. Якщо у момент надходження всі прилади зайняті, вимога намагається зайняти місце в черзі для очікування початку обслуговування. Якщо всі m місць у черзі зайняті, вимога, що надійшла, стає джерелом повторних викликів і приєднується до орбіти. Інтенсивність повторів не залежить від кількості вимог на орбіті і дорівнює μ.

Процес обслуговування вимог у системі, що розглядається, може бути описаний двовимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом $X(t)=(X_1(t), X_2(t))^T$, $X_1(t)\in\{0,1,\ldots,c+m\}$, $X_2(t)\in\{0,1,\ldots\}$, який визначається своїми інфінітезимальними характеристиками $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i,j),(i',j')\in S(X)=\{0,1,\ldots,c+m\}\times\{0,1,\ldots\}$ такого вигляду:

1) якщо $0\leqslant i<c,\ \ j>0$, то

$$a_{(i,\,j)(i',\,j')} = \begin{cases} \lambda, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i+1,\,j); \\ \mu, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i+1,\,j-1); \\ i\nu, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i-1,\,j); \\ -(\lambda+\mu+i\nu), & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i,\,j); \\ 0, & \text{у протилежному випадку;} \end{cases}$$

2) якщо $c \leqslant i < c+m, \;\; j > 0$, то

$$a_{(i,\,j)(i',\,j')} = \begin{cases} \lambda, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i+1,\,j); \\ c\nu, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i-1,\,j); \\ -(\lambda+c\nu), & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i,\,j); \\ 0, & \text{у протилежному випадку;} \end{cases}$$

3) якщо $i = c+m, \;\; j \geqslant 0$, то

$$a_{(c+m,\,j)(i',\,j')} = \begin{cases} \lambda, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (c+m,\,j+1); \\ c\nu, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (c+m-1,\,j); \\ -(\lambda+c\nu), & \text{коли} \quad (i',\,j') = (c+m,\,j); \\ 0, & \text{у протилежному випадку;} \end{cases}$$

4) якщо $0 \leqslant i < c+m, \;\; j = 0$, то

$$a_{(i,\,0)(i',\,j')} = \begin{cases} \lambda, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i+1,0); \\ (i \wedge c)\nu, & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i-1,0); \\ -\left[\lambda+(i \wedge c)\nu\right], & \text{коли} \quad (i',\,j') = (i,\,0); \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

де $(i \wedge c) = \min(i, c)$.

Перша компонента $X_1(t) \in \{0, 1, \ldots, c+m\}$ дорівнює сумарній кількості зайнятих приладів і вимог у черзі в момент часу $t \geqslant 0$. Друга компонента $X_2(t) \in \{0, 1, \ldots\}$ вказує на кількість вимог на орбіті. У подальшому процес $X(t) = (X_1(t), X_2(t))^T$ є головним об'єктом наших досліджень.

Множину станів $X(t)$ зручно впорядкувати таким чином:

$$S(X) = \{(0,0), (1,0), \ldots, (c+m,0), (0,1), (1,1), \ldots, (c+m,1), \ldots\}.$$

Тоді інфінітезимальна матриця ланцюга $X(t)$ може бути подана у блочній формі:

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{(0,0)} & Q^{(0,+1)} & & & \\ Q^{(-1)} & Q^{(0)} & Q^{(+1)} & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & Q^{(-1)} & Q^{(0)} & Q^{(+1)} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де $Q^{(0,0)} = \left\| q_{ij}^{(0,0)} \right\|_{i,j=0}^{c+m}$ — тридіагональна матриця з елементами

$$q_{ij}^{(0,0)} = \begin{cases} -[\lambda + (i \wedge c)\nu], & \text{коли} \quad i = j = 0, \ldots, c+m; \\ (i \wedge c)\nu, & \text{коли} \quad j = i-1, i = 1, \ldots, c+m; \\ \lambda, & \text{коли} \quad j = i+1, i = 0, \ldots, c+m-1; \\ 0, & \text{у протилежному випадку;} \end{cases}$$

$Q^{(0,+1)} = \left\| q_{ij}^{(0,+1)} \right\|_{i,j=0}^{c+m} = \Lambda(0, \ldots, 0, \lambda)$ діагональна матриця з вектором $(0, \ldots, 0, \lambda)^T$ на головній діагоналі;

$Q^{(0)} = \left\| q_{ij}^{(0)} \right\|_{i,j=0}^{c+m}$ — тридіагональна матриця з елементами

$$q_{ij}^{(0)} = \begin{cases} -(\lambda + \mu + i\nu), & \text{коли} \quad i = j = 0, \ldots, c-1; \\ -(\lambda + c\nu), & \text{коли} \quad i = j = c, c+1, \ldots, c+m; \\ (i \wedge c)\nu, & \text{коли} \quad j = i-1, i = 1, \ldots, c+m; \\ \lambda, & \text{коли} \quad j = i+1, i = 0, \ldots, c+m-1; \\ 0, & \textit{у протилежному випадку}; \end{cases}$$

$Q^{(+1)} = Q^{(0,+1)} = \Lambda(0, \ldots, 0, \lambda)$ – діагональна матриця;

$Q^{(-1)} = \left\| q_{ij}^{(-1)} \right\|_{i,j=0}^{c+m}$,

$$q_{ij}^{(-1)} = \begin{cases} \mu, & \text{коли} \quad j = i+1, i = 0, \ldots, c-1; \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Подання Q у вигляді (1) гарантує те, що $X(t)$ є незалежний від рівня квазінародження та загибелі процес (QBD процес; див., наприклад, [11], с. 189). Щоб знайти умови ергодичності для $X(t)$, розглянемо тридіагональну інфінітезимальну матрицю $\tilde{Q} = Q^{(-1)} + Q^{(0)} + Q^{(+1)} = \left\| \tilde{q}_{ij} \right\|_{i,j=0}^{c+m}$, де

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} -(\lambda + \mu + i\nu), & \text{коли} \quad i = j = 0, \ldots, c-1; \\ -(\lambda + c\nu), & \text{коли} \quad i = j = c, c+1, \ldots, c+m-1; \\ -c\nu, & \text{коли} \quad i = j = c+m; \\ (i \wedge c)\nu, & \text{коли} \quad j = i-1, i = 1, \ldots, c+m; \\ \lambda + \mu, & \text{коли} \quad j = i+1, i = 0, \ldots, c-1; \\ \lambda, & \text{коли} \quad j = i+1, i = c, \ldots, c+m-1; \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Розв’язуючи систему рівнянь

$\rho^T \tilde{Q} = 0_{c+m+1}^T$, $\rho^T 1_{c+m+1} = 1$, де 0_{c+m+1}, 1_{c+m+1} представляють собою $(c+m+1)$-вимірні вектори, складені з нулів і одиниць відповідно, ми знаходимо

$$\rho_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda+\mu}{\nu}\right)^i \left\{\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda+\mu}{\nu}\right)^k + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda+\mu}{\nu}\right)^c \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{c\nu}\right)^k\right\}^{-1}$$

для $i = 0, \ldots, c-1$,

$$\rho_i = \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda+\mu}{\nu}\right)^c \left(\frac{\lambda}{c\nu}\right)^{i-c} \left\{\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda+\mu}{\nu}\right)^k + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda+\mu}{\nu}\right)^c \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{c\nu}\right)^k\right\}^{-1}$$

для $i = c, \ldots, c+m$.

Умова ергодичності для незалежних від рівня QBD процесів

$$\rho^T Q^{(+1)} 1_{c+m+1} < \rho^T Q^{(-1)} 1_{c+m+1}$$

у випадку $X(t)$ приймає вид

$$\lambda \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda+\mu}{\nu}\right)^c \left(\frac{\lambda}{c\nu}\right)^m < \mu \sum_{i=0}^{c-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda+\mu}{\nu}\right)^i. \tag{2}$$

Таким чином ми довели такий допоміжний результат.

Лема 1. *Якщо умова* (2) *виконується, то процес* $X(t)$ *буде ергодичним.*

При виконанні умови (2) через π_{ij}, $(i, j) \in S(X)$ будемо позначати стаціонарні імовірності $X(t)$. Наша найближча мета — побудувати явні формули для π_{ij}.

Стаціонарний розподіл. Для того, щоб подати результати аналізу стаціонарного режиму у стислому вигляді, ми введемо матриці, які визначаються параметрами моделі:

$A = \left\| a_{ij} \right\|_{ij=1}^{c+m}$ -матриця з елементами $a_{ii-1} = \mu$, $i = 1, 2, \ldots, c+m-1$,

$$a_{c+mj} = \begin{cases} \dfrac{c\mu\nu}{\lambda}, & j \neq c+m-1, \\ \dfrac{\mu(\lambda + c\nu)}{\lambda}, & j = c+m-1; \end{cases}$$

усі інші елементи матриці A дорівнюють нулю; $B = \left\| b_{ij} \right\|_{ij=1}^{c+m}$ -тридіагональна матриця з елементами, $b_{ii-1} = -\lambda$, $i = 1, 2, \ldots, c+m$, $b_{ii} = \lambda + \mu + [(i-1) \wedge c]\nu$, $i = 1, \ldots, c+m-1$, $b_{ii+1} = -(i \wedge c)\nu$, $i = 1, \ldots, c+m-1$; $C = \left\| c_{ij} \right\|_{ij=1}^{c+m}$, де $c_{11} = 1$, $c_{1j} = 0$, $j = 2, \ldots, c+m$, $c_{ij} = b_{i-1j}$, $j = 2, \ldots, c+m$, $i = 1, \ldots, c+m$.

Для введених матриць методом Гаусса–Жордана отримаємо такий допоміжний результат.

Лема 2. *Матриці* B_0, B *і* C *є неособливими, причому*:

1. $B_0^{-1} = \left\| b_0^{(-1)}(i, k) \right\|_{i,\, k=1,}^{c+m,}$

де

$$b_0^{(-1)}(i, k) = \sum_{j=(k-i)^+}^{(k-c)^+} \frac{(i+j-1)!\,\nu^j}{(i-1)!\,\lambda^{j+1}} + \frac{1}{\lambda}\frac{(c-1)!}{(i-1)!}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{c-i} \sum_{j=(k-c)^+}^{m}\left(\frac{c\nu}{\lambda}\right)^j,\ i = 1, \ldots, c-1,$$

$$b_0^{(-1)}(i,k) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=(k-i)^+}^{c+m-i}\left(\frac{c\nu}{\lambda}\right)^j,\ (k-i)^+ = \max(0,k-i),\ i = c,\ldots,c+m.$$

2. $B^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} B_1^p F^{-1}$, *де* F *є діагональна матриця з елементами* $f_{ii} = \lambda+\mu+[(i-1)\wedge c]\nu$, $i = c,\ldots,c+m$, *на головній діагоналі*; $B_1 = \left\|b_1(i,j)\right\|_{i,\,j=1}^{c+m}$ *є матриця, ненульові елементи якої дорівнюють*:

$$b_1(i,i-1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+[(i-1)\wedge c]\nu},\ i = 2,\ldots,c+m,$$

$$b_1(i,i+1) = \frac{(i\wedge c)\nu}{\lambda+\mu+[(i-1)\wedge c]\nu},\ i = 1,\ldots,c+m-1.$$

Щоб побудувати стаціонарний розподіл для процесу обслуговування в $M|M|c|c+m$-системі, розглянемо аналогічну систему із скінченним фазовим простором. Така система має обмеження на розмір орбіти: нові вимоги втрачаються, якщо всі обслуговуючі прилади зайняті, немає вільних місць для очікування в черзі і на орбіті вже знаходиться N вимог. Формально процес обслуговування в системі з обмеженням на розмір орбіти можна описати ланцюгом Маркова $X^T(t,N) = (X_1(t,N), X_2(t,N))$, $X_1(t,N)\in\{0,1,\ldots,c+m\}$, $X_2(t,N)\in \in\{0,1,\ldots,N\}$. Його інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j)(i',j')}^{(N)}$, $(i,j),(i',j')\in S(X,N) = =\{0,1,\ldots,c+m\}\times\{0\,1,\ldots,N\}$ збігаються з інфінітезимальними характеристиками $a_{(i,j)(i',j')}$ ланцюга $X(t)$ у всіх фазових точках, за виключенням граничної $(c+m,N)$:

$$a_{(c+m,N)(i',j')}^{(N)} = \begin{cases} c\nu, & \text{коли } (i',j') = (c+m-1), \\ -c\nu, & \text{коли } (i',j') = (c+m,N), \\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Фазовий простір $S(X,N)$ процесу $X(t,N)$ є скінченним, тому $X(t,N)$ має стаціонарний розподіл і через $\pi_{ij}(N)$, $(i,j)\in S(X,N)$ будемо позначати його стаціонарні ймовірності.

Позначимо $\pi_j(N) = (\pi_{0j}(N),\ldots,\pi_{c+m-1j}(N))^T$ вектор стаціонарних імовірностей. Справедливим є такий результат.

Лема 3. *Стаціонарні ймовірності процесу* $X(t,N)$ *можна подати у такій формі*:

$$\pi_j(N) = \Delta_j(N)\cdot\pi_{00}(N),\quad j = 0,1,\ldots,$$

де $\Delta_0(N) = B_0^{-1}A\Delta_1(N)$, $\Delta_j(N) = \dfrac{(B^{-1}A)^{N-j}C^{-1}e_1}{e_1^T B_0^{-1}B(B^{-1}A)^N C^{-1}e_1}$, $\quad j = 1,2,\ldots,$

$e_1 = (\delta_{11},\ldots,\delta_{1c+m})^T$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Тепер перейдемо до вивчення граничної поведінки векторів, коли $N\to\infty$. Спираючись на роботу [13] (теорема 8.2.8), можна довести такий результат.

Лема 4. *Границі векторів* $\Delta_j(N)$, $j = 0,1,\ldots$, *коли* $N\to\infty$ *мають подання у формі*:

$$\Delta_0 = B_0^{-1} A \Delta_1, \ \ \Delta_j = \lim_{N\to\infty} \Delta_j(N) = \frac{uv^T C^{-1} e_1}{e_1^T B_0^{-1} B (B^{-1}A)^j uv^T C^{-1} e_1}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

де $u^T = (u_1, u_2, \ldots, u_{c+m}) > 0$, $v^T = (v_1, v_2, \ldots, v_{c+m}) > 0$ *– правий і лівий власні вектори матриці* $B^{-1}A$*, які відповідають перроновому кореню.*

Коли $N \to \infty$ стаціонарні таціонарні імовірності $\pi_{ij}(N)$ апроксимують відповідні імовірності π_{ij} для моделі, що розглядається (див. теорему 2.3 і 2.4 з [1], розділ 2 про стохастичну впорядкованість імовірносних розподілів для процесів міграції). У подальшому ми отримаємо явні вирази для $\pi_{ij}(N)$ та π_{ij} через параметри моделі, що дозволить оцінити точність апроксимації.

На основі цієї апроксимації і допоміжних результатів, доведених раніше, ми отримаємо головний результат.

Теорема 1. *Якщо процес* $X(t)$ *задовольняє умові леми* 1, *то*

$$\pi_j = \lim_{N\to\infty} \pi_j(N) = \Delta_j \cdot \pi_{00}, \ \pi_{c+mj} = \frac{\mu}{\lambda} 1^T (c+m) \Delta_{j+1} \pi_{00}, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

де $\pi_j = (\pi_{0j}, \ldots, \pi_{c+m-1,\, j})^T$, $\pi_{00} = \left\{ 1^T (c+m) \Delta_0 + \frac{\lambda+\mu}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} 1^T (c+m) \Delta_j \right\}^{-1}$.

Як наслідок теореми 1 ми можемо отримати явний вид стаціонарних імовірностей.

Наслідок 1. Якщо процес $X(t)$ задовольняє умові леми 1, то:

$$\pi_0 = B_0^{-1} A uv^T C^{-1} e_1 H^{-1}, \ \pi_j = r^{-j} uv^T C^{-1} e_1 H^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\pi_{c+mj} = \frac{\mu}{\lambda} r^{-j-1} 1^T (c+m) uv^T C^{-1} e_1 H^{-1}, \ j = 0, 1, \ldots \tag{3^1}$$

де $H = 1^T (c+m) \left(B_0^{-1} A + \frac{1+\mu/\lambda}{r-1} E \right) uv^T C^{-1} e_1$.

Зауважимо, що формули (3) та (3^1) є простішими, ніж модифікована матрично-геометрична форма стаціонарних імовірностей, що випливає із загально відомої теорії QBD процесів (див., наприклад, [11], с. 196). Формули (3) та (3^1) більш точно вказують на структуру стаціонарного розподілу (зважений геометричний розподіл) і вони є джерелом явних формул для головних показників процесу обслуговування у стаціонарному режимі.

Чисельні результати. З використанням отриманих формул обчислимо деякі показники процесу обслуговування вимог у системі з повторними викликами, що наводиться. Розглянемо блокуючу ймовірність π_b і середнє число вимог на орбіті $E[X_2]$. Беручи до уваги результати теореми 1 і наслідку 1, ці показники можна обчислювати за такими формулами:

$$\pi_b = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{c+mj} = \frac{\mu/\lambda}{r-1} 1^T (c+m) uv^T C^{-1} e_1 H^{-1},$$

$$E[X_2] = \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{i=0}^{c+m} \pi_{ij} = \frac{r+1}{(r-1)^2} 1^T (c+m) uv^T C^{-1} e_1 H^{-1}.$$

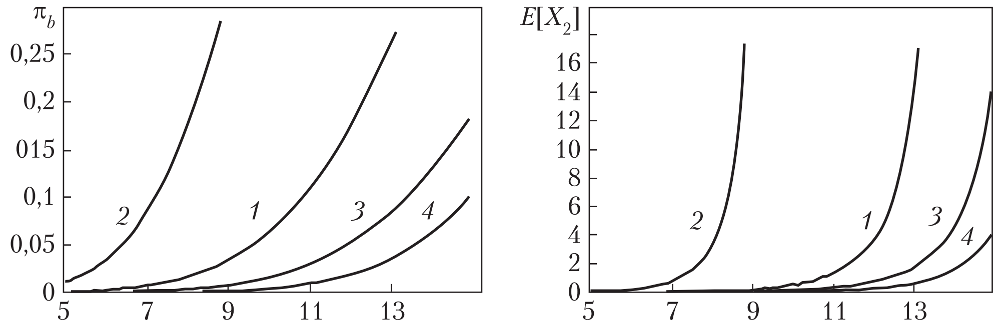

Рис. 1. Блокуюча ймовірність π_b і середнє число вимог на орбіті $E[X_2]$ в залежності від λ: *1* — $c = 5$, $m = 2$, $v = 3$, $\mu = 7$; *2* — $c = 5$, $m = 2$, $v = 2$, $\mu = 5$; *3* — $c = 6$, $m = 2$, $v = 3$, $\mu = 5$; *4* — $c = 6$, $m = 4$, $v = 3$, $\mu = 5$

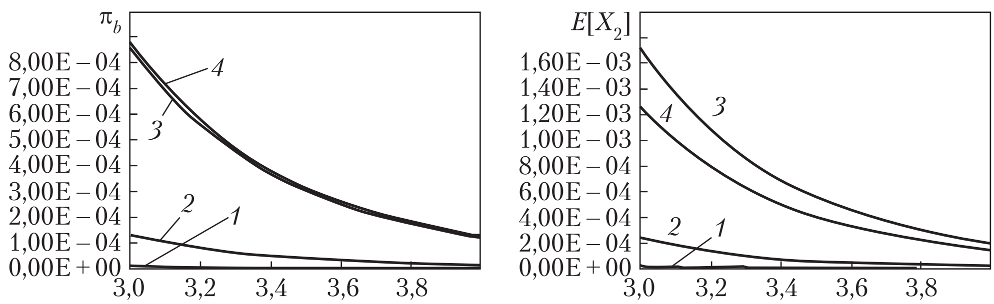

Рис. 2. Блокуюча ймовірність π_b і середнє число вимог на орбіті $E[X_2]$ в залежності від ν: *1* — $c = 6$, $m = 4$, $\lambda = 5$, $\mu = 5$; *2* — $c = 6$, $m = 2$, $\lambda = 5$, $\mu = 5$; *3* — $c = 5$, $m = 2$, $\lambda = 5$, $\mu = 5$; *4* — $c = 5$, $m = 2$, $\lambda = 5$, $\mu = 7$

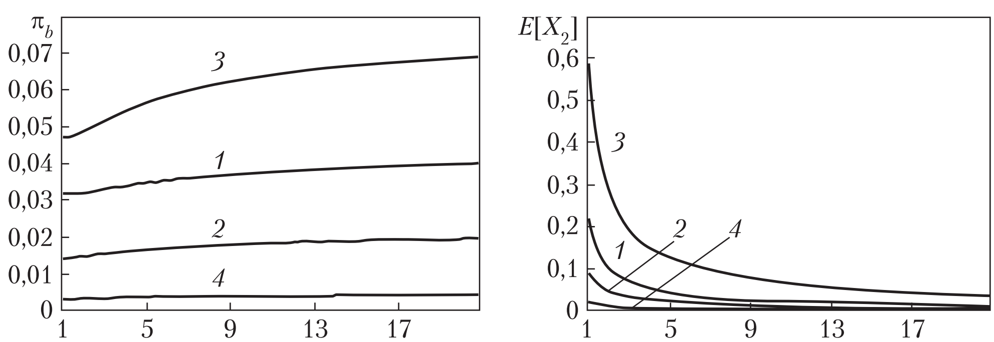

Рис. 3. Блокуюча ймовірність π_b і середнє число вимог на орбіті $E[X_2]$ в залежності від μ: *1* — $c = 2$, $m = 2$, $\lambda = 2$, $v = 2$; *2* — $c = 2$, $m = 3$, $\lambda = 2$, $v = 2$; *3* — $c = 2$, $m = 3$, $\lambda = 2{,}5$, $v = 2$; *4* — $c = 3$, $m = 3$, $\lambda = 2{,}5$, $v = 2$

Вплив параметрів моделі на блокуючу ймовірність і середнє число вимог на орбіті графічно показано на рис. 1—3.

Представлені на рис. 1—3 графіки дають можливість обирати параметри моделі, що розглядається, таким чином, щоб поліпшити показники ефективності процесу обслуговування вимог.

Висновки. У роботі представлено аналіз стаціонарного режиму для системи з повторними викликами, яка складається з c обслуговуючих приладів, обмеженою чергою і потоком повторних викликів з орбіти сталої інтенсивності. Отримано явні формули для стаціонарних імовірностей через параметри моделі. У подальшому ці результати можуть бути застосовані до більш детального вивчення моделі: обчислення показників ефективності процесу обслуговування, розв'язку оптимізаційних задач.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Falin G.I. & Templeton J.G.C. Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997. 329 p.
2. Choi B.D., Shin Y.W. and Ahn W.C. Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing Systems*. 1992. № 11. P. 335—356.
3. Avrachenkov K. and Yechiali U. Retrial networks with finite buffers and their application to internet data traffic. *Probability in the Eng. and Informat. Sci*. 2008. **22**. P. 519—536.
4. Avrachenkov K. U. Yechiali U. On tandem blocking queues with a common retrial queue. *Computers & Operations Research*. 2010. **37**. P. 1174—1180.
5. Artalejo J.R., Gomez-Corral A., Neuts M.F. Analysis of multiserver queues with constant retrial rate. *Eur. J. Operat. Research*. 2001. **135**. P. 569—581.
6. Neuts M.F. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: The Johns Hopkins Univ. Press, 1981.
7. Do T.V., Chakka R. An efficient method to compute the rate matrix for retrial queues with large number of servers. *Appl. Math. Lett*. 2010. **23**. P. 638—643.
8. Artalejo J.R. Stationary analysis of the characteristics of the M/M/2 queue with constant repeated attempts. *Opsearch*. 1996. **33**. P. 83—95.
9. Gomez-Corral A., Ramalhoto M.F. The stationary distribution of a Markovian process arising in the theory of multiserver retrial queueing systems. *Math. and Computer Modelling*. 1999. **30**. P. 141—158.
10. Gomez-Corral A., Ramalhoto M.F. On the waiting time distribution and the busy period of a retrial queue with constant retrial rate. *Stochastic Modelling and Applications*. 2000. **3** (2). P. 37—47.
11. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial queueing systems. A computational approach. Berlin Heidelberg: Springer, 2008. 317 p.
12. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. Москва: Мир, 1993. 336 с.
13. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 655 с.

Надійшло до редакції 16.04.2020

REFERENCES

1. Falin, G. I., Templeton, J. G. C. (1997). Retrial queues. London: Chapman & Hall.
2. Choi, B. D., Shin, Y. W. & Ahn W.C. (1992). Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. Queueing Systems, No. 11. P. 335-356.
3. Avrachenkov, K. & Yechiali, U. (2008). Retrial networks with finite buffers and their application to internet data traffic. Probability in the Eng. and Informat. Sci., 22, pp. 519-536.
4. Avrachenkov, K. U. & Yechiali, U. (2010). On tandem blocking queues with a common retrial queue. Computers & Operations Research, 37, pp. 1174-1180.
5. Artalejo, J. R., Gomez-Corral, A. & Neuts, M. F. (2001). Analysis of multiserver queues with constant retrial rate. Eur. J. Operat. Research., 135, pp. 569-581.
6. Neuts, M. F. (1981). Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: The Johns Hopkins Univ. Press.
7. Do, T. V. & Chakka, R. (2010). An efficient method to compute the rate matrix for retrial queues with large number of servers. Appl. Math. Lett., 23, pp. 638-643.
8. Artalejo, J. R. (1996). Stationary analysis of the characteristics of the M/M/2 queue with constant repeated attempts. Opsearch, 33, pp. 83-95.

9. Gomez-Corral, A. & Ramalhoto, M. F. (1999). The stationary distribution of a Markovian process arising in the theory of multiserver retrial queueing systems. Math. and Computer Modelling, 30, pp. 141-158.
10. Gomez-Corral, A. & Ramalhoto, M. F. (2000). On the waiting time distribution and the busy period of a retrial queue with constant retrial rate. Stochastic Modelling and Applications, 3 (2), pp. 37-47.
11. Artalejo, J. R. & Gomez-Corral, A. (2008). Retrial queueing systems. A computational approach. Berlin Heidelberg: Springer.
12. Walrand, J. (1993). An introduction to queueing networks. Moscow: Mir (in Russian).
13. Horn, R. & Johnson, C. (1989). Matrix analysis. Moscow: Mir (in Russian).

Received 16.04.2020

E.A. Lebedev, V.D. Ponomarov

Taras Shevchenko National University of Kyiv
E-mail: leb@unicyb.kiev.ua

STATIONARY REGIME FOR A QUEUE
OF THE TYPE $M|M|c|c+m$ WITH CONSTANT RETRIAL RATE

A bivariate Markov process $\{X(t)=(X_1(t),X_2(t))^T, t\geqslant 0\}$ whose phase space is a lattice semistrip $S(X)=\{0,1,\ldots,c+m\}\times Z_+$ is considered. The first component $X_1(t)\in\{0,1,\ldots,c+m\}$ indicates the summarized number of busy servers and calls in the queue at the instant $t\geqslant 0$, whereas the second one $X_2(t)\in\{0,1,\ldots\}$ is the number of retrial sources. Parameter $c\in Z_+$ is a number of servers and $m\in Z$ is a maximal size of the queue. Local rates of $X(t)$ are defined in such a way that $X(t)$ describes the service policy of a multi-server retrial queue in which the rate of repeated flow does not depend on the number of sources of repeated calls.

First, using tools of the theory for the QBD-processes (quasi-birth-and-death processes), we study the ergodicity conditions. Then, under these conditions, we consider a problem of finding the steady state probabilities for $X(t)$. A vector-matrix representation of the probabilities via the model parameters is obtained. The applied technique uses an approximation of the initial model by a truncated one and the direct passage to the limit. The obtained formulae are the adequate method to calculate the steady state probabilities.

An application of the main result is demonstrated via numerical examples in which we can see relation graphs of the blocking probability and the average number of retrials versus system parameters.

Keywords: *stationary regime, system with retrial calls, service process, ergodicity condition, truncated model, vector-matrix representation.*