

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.032>

УДК 539.421

М.Ф. Селіванов, В.В. Процан

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: mfs@ukr.net, overfiled@gmail.com

Порівняння двох потенціальних когезійних моделей для прогнозування граничного рівня навантаження скінченної ортотропної пластини з похилою тріщиною

Представлено академіком НАН України Я.М. Григоренком

Розглянуто крайову задачу теорії пружності для скінченного ортотропного тіла із похилою крайовою тріщиною. Тіло перебуває під дією одновісного навантаження, а тріщина розташована вздовж однієї з осей ортотропії матеріалу під кутом до напрямку прикладання навантаження.

Для дослідження механізмів зростання тріщини використано модель зони зчеплення (когезійну модель) для змішаного режиму руйнування. Закон зчеплення–відриву передбачає зв'язаність нормальних і тангенціальних зчеплень у потенціальній формі. Використано два закони, які будуються на основі законів простих режимів руйнування (нормальний відрив та поперечний зсув) з різними формами змішаності, але без параметрів змішаності режимів.

Побудовано алгоритм розв'язування задачі для визначення параметрів граничної рівноваги тріщини методом скінченних елементів. Наведено приклад обчислення параметрів граничного стану та відповідного поля напружень для двох когезійних законів змішаного режиму руйнування.

Досліджено вплив форми змішаності когезійних законів на параметри граничного стану. Для дослідженого діапазону параметрів ортотропії встановлено, що форма змішаності двох поширених в літературі когезійних законів дає похибку у визначенні граничного рівня навантаження менше п'яти відсотків. Ця розбіжність зменшується із зменшенням довжини зчеплення.

Ключові слова: *змішаний режим руйнування, похила крайова тріщина, тріщина в ортотропному тілі, потенціальний закон зчеплення–відриву.*

Вступ і постановка задачі. Задача про прямолінійну крайову тріщину є основною для тестування нових підходів механіки руйнування, яка враховує різноманітні аспекти руйнування, одним з яких є наявність зони передруйнування в околі вершини тріщини. Дослідження цього типу руйнування почались в другій половині 70-х років ХХ сторіччя для випадку розташування тріщини вздовж нормалі до півплощини, головна увага була приділена знаходженню когезійної довжини для моделі Дагдейла [1]. Ця модель базується на припущенні

Цитування: Селіванов М.Ф., Процан В.В. Порівняння двох потенціальних когезійних моделей для прогнозування граничного рівня навантаження скінченної ортотропної пластини з похилою тріщиною. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 7. С. 32–42. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.032>

сталості інтенсивності сил зчеплення вздовж фіктивного розрізу на продовженні лінії тріщини (цей розріз моделює зону передруйнування) і надає аналітичні вирази двох головних параметрів нелінійної механіки руйнування – розкриття у вершині тріщини і розмір зони передруйнування. У випадку залежності інтенсивності когезійної взаємодії від відстані до вершини фізичної тріщини [2], модель часто називають моделлю Баренבלата–Дагдейла. Робота [3] розпочала новий етап розвитку механіки руйнування шляхом врахування залежності когезійної взаємодії від розкриття тріщини, $\sigma_{coh} = T(\Delta)$. Таку модель назвали когезійною моделлю тріщини (або моделлю зони зчеплення), а функцію T – законом зчеплення–відриву (ЗЗВ). В рамках цієї моделі для когезійних законів, близьких до рівномірного [4], використовується той самий критерій руйнування, що і для моделі Дагдейла: повне руйнування має місце якщо розкриття стає більшим за характеристичну довжину Δ^* .

Щоб поширити когезійну модель тріщини на змішаний режим руйнування можна вважати нормальні та тангенціальні когезійні сили функцією нормального (Δ_I) та тангенціального (Δ_{II}) розкриття [5]: $\sigma_{coh} = T_I(\Delta)$, $\tau_{coh} = T_{II}(\Delta)$ ($\Delta = (\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II})$). Для потенціальних моделей співвідношення між силами зчеплення і розкриттям будується поєднанням форм зчеплення–відриву простих режимів руйнування за допомогою потенціальної функції Ψ ($T_I = \partial\Psi / \partial\Delta_I$, $T_{II} = \partial\Psi / \partial\Delta_{II}$).

При дослідженні відшарування використовуються внутрішні закони зчеплення–відриву (когезійна взаємодія для простого режиму руйнування відсутня за нульового розкриття), в той час як у випадку суцільних матеріалів зовнішні (жорсткі) моделі є фізично коректними. Останні з вказаних моделей характеризуються максимально можливою когезійною взаємодією за нульового розкриття (рис 1, а). При використанні аналітичних методів така властивість забезпечує виконання умови скінченності напружень [6–9]; використання зовнішнього закону зчеплення–відриву вимагає знаходження довжини зчеплення з умови скінченності напружень, що ускладнює розв’язання задачі [9]. Якщо довжину зчеплення взяти більшою за необхідну – розв’язок задачі розбігається, якщо більшою – розв’язок не буде фізично коректним [10]. В першому випадку уникнути явного знаходження довжини зчеплення можна наближенням закону зовнішнього типу законом внутрішнього типу з достатньо малою ділянкою зміцнення (такий підхід буде використано в даній роботі).

Гранична задача для потенціальної функції може включати наступні умови:

$$1) \text{ енергія руйнування нормальним відривом } \int_0^{\Delta_I^*} T_I(\Delta_I, 0) d\Delta_I = \phi_I;$$

$$2) \text{ енергія руйнування зсувом } \int_0^{\Delta_{II}^*} T_{II}(\Delta_{II}, 0) d\Delta_{II} = \phi_{II};$$

3) повне руйнування нормальним відривом та зсувом відбувається за нульового нормального зчеплення: $T_I(\Delta_I^*, \Delta_{II}) = 0$ (а), $T_I(\Delta_I, \Delta_{II}^*) = 0$ (б);

4) повне руйнування нормальним відривом та зсувом відбувається за нульового тангенціального зчеплення: $T_{II}(\Delta_I^*, \Delta_{II}) = 0$ (а), $T_{II}(\Delta_I, \Delta_{II}^*) = 0$ (б).

В [11] для моделювання поля когезійних напружень було запропоновано потенціал

$$\Psi(\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II}) = \phi_I [1 - (1 - \bar{\Delta}_I)^\gamma] + \phi_{II} [1 - (1 - \bar{\Delta}_{II})^\delta] (1 - \bar{\Delta}_{II})^\delta. \quad (1)$$

Тут введено позначення $\bar{\Delta}_I = \Delta_I / \Delta_I^*$ та $\bar{\Delta}_{II} = \Delta_{II} / \Delta_{II}^*$ для відносних відривів. Характеристики критичного розкриття $\Delta_{I,II}^*$ визначаються параметрами руйнування відповідних простих режимів руйнування [12].

Потенціал (1) визначено на верхній півплощині $\Delta_I \geq 0$, що забезпечує відсутність перекриття берегів; γ і δ є параметрами форми простих режимів руйнування. Перепишемо потенціал у вигляді

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II}) &= \phi_I f_1(\bar{\Delta}_I) + \phi_{II} [1 - f_1(\bar{\Delta}_I)] f_2(\bar{\Delta}_{II}), \\ f_1(x) &= 1 - (1 - x)^\gamma, \quad f_2(y) = 1 - (1 - y)^\delta, \end{aligned} \quad (2)$$

таким чином узагальнивши його на інші прості режими руйнування з функціями форми $f_{1,2}$. Потенціал (2) генерує поле когезійної взаємодії двох типів в залежності від знака величини $\phi_I - \phi_{II}$. Далі в цій роботі вважатимемо, що енергія руйнування з нормальним відривом менша за енергію зсувного режиму ($\phi_I < \phi_{II}$) і розглянемо два типи потенціальних функцій. Потенціал першого типу

$$\Psi(\bar{\Delta}) = \phi_I f_1(\bar{\Delta}_I) [1 - f_2(\bar{\Delta}_{II})] + \phi_{II} f_2(\bar{\Delta}_{II}) \quad (3)$$

та другого потенціал типу

$$\Psi(\bar{\Delta}) = \phi_I f_1(\bar{\Delta}_I) + \phi_{II} [1 - f_1(\bar{\Delta}_I)] f_2(\bar{\Delta}_{II}). \quad (4)$$

Потенціал (3) задовільняє всі граничні умови окрім 4a. Руйнування нормальним відривом відбувається за ненульового тангенціального зчеплення. Таким чином, для потенціалу першого типу умова $T_{II}(\Delta_I^*, \Delta_{II}) = 0$ не задовольняється, що вважається головним недоліком моделі [13].

Потенціал (4) забезпечує як нульове тангенціальне зчеплення, коли відбувається повне руйнування в нормальному та дотичному напрямках, так і нульове нормальне зчеплення, коли відбувається повне руйнування нормальним відривом. Умови 3 і 4, таким чином, виконуються. Єдиною вадою потенціалу є те, що величина нормального зчеплення стає від'ємною для величин тангенціальних відривів, близьких до критичних. Щоб позбутися цієї вади в [11] було запропоновано змінити умову $T_I(\Delta_I, \Delta_{II}^*) = 0$ на $T_I(\Delta_I, \Delta_{II}^*) = 0$, де $\Delta_{II}^* < \Delta_I^*$.

Метою даної роботи є виявлення розбіжностей між прогнозами критичного навантаження, що дають потенціали двох розглянутих типів за однакових характеристик тріщиностійкості. Іншими словами, треба показати як впливає розбіжність у формі змішаності двох законів на критичне значення зовнішнього навантаження.

З цією метою проведемо МСЕ-аналіз в рамках когезійної моделі тріщини для скінченної пластини. Розглянемо тріщину, напрямком якої збігається з напрямком однієї з осей ортотропії матеріалу пластини, а напрямком ортотропії не збігається з напрямком прикладання навантаження (рис. 1, б).

Розрахунки проведемо для пластини шириною A і довжиною B з крайовою тріщиною, розташованою під кутом α відносно нормалі до границі тіла. Пластину в умовах плоского напруженого стану (з одиничною товщиною) навантажено розтягувальним навантаженням σ . Об'ємні сили відсутні. Неушкоджений матеріал вважаємо ортотропним лінійно пруж-

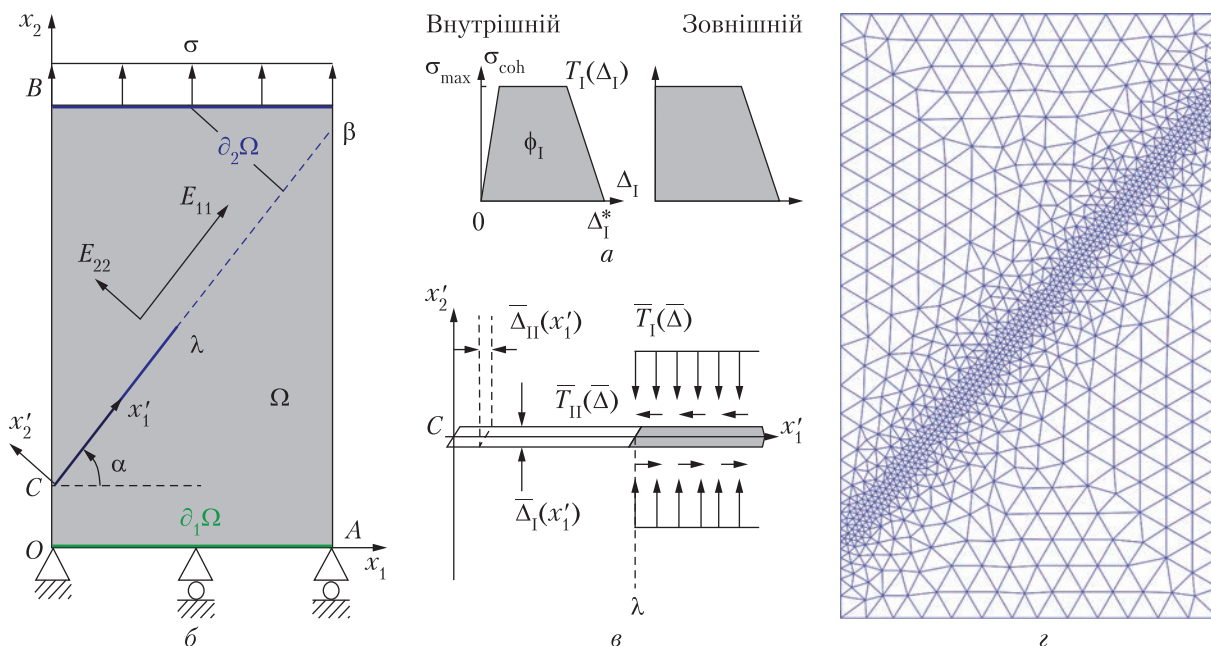


Рис. 1

ним з модулями E_{11} , E_{22} , ν_{21} і G_{12} . Тіло знаходиться в однорідному температурному полі, переміщення є малими.

На рис. 1, б зображена область пластини, Ω . Прийmemo, що на частині поверхні тіла $\partial_1\Omega$ задано переміщення \hat{u}_i , а на частині $\partial_2\Omega$ прикладені поверхневі сили t_i . Система рівнянь для визначення напружено-деформованого стану тіла:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j} &= 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad x_i \in \Omega, \\
 u_i &= \hat{u}_i, \quad x_i \in \partial_1\Omega, \\
 \sigma_{ij,j}n_j &= t_i, \quad x_i \in \partial_2\Omega, \\
 \sigma_{ij} &= D_{ijkl}\varepsilon_{kl},
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

де σ_{ij} , ε_{ij} і D_{ijkl} – компоненти тензорів напружень, деформацій та пружних сталих; u_i , t_i і n_i – компоненти векторів переміщень, поверхневих сил та одиничного вектора нормалі до поверхні тіла,

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_2 &= 0, & x_1 \in [0, A], x_2 &= 0 \\
 t'_1 &= \mp T_{II}(2u'_1 / \Delta_{II}^*, 2u'_2 / \Delta_1^*), & x'_1 \in [\lambda, \beta], x'_2 &= 0 \pm \\
 t'_2 &= \mp T_I(2u'_1 / \Delta_{II}^*, 2u'_2 / \Delta_1^*), & x'_1 \in [\lambda, \beta], x'_2 &= 0 \pm \\
 t_2 &= \sigma, & x_1 \in [0, A], x_2 &= B,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

де u'_i і t'_i – компоненти векторів переміщень і поверхневих сил в системі координат $Cx'y'$, $\beta = A / \cos\alpha$, $T_{I,II}$ проілюстровано на рис. 1, в. Для визначення граничного навантаження систему (6) треба доповнити рівнянням

$$\max \{2u'_1(\lambda, 0) / \Delta_{I}^*, 2u'_2(\lambda, 0) / \Delta_I^*\} = 1.$$

У випадку, коли напрямок осей ортотропії збігається з напрямком координатних осей, зв'язок деформацій з напруженнями має форму

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad [D]^{-1} = \begin{bmatrix} E_{11}^{-1} & -\nu_{21}E_{22}^{-1} & 0 \\ -\nu_{12}E_{11}^{-1} & E_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

причому $\nu_{21} / E_{22} = \nu_{12} / E_{11}$.

В [8, 12] встановлено, що незалежними параметрами ортотропії при побудові розв'язку задачі теорії тріщин є наступні сталі:

$$\frac{2nk}{E_{11}}, \quad M = \frac{2n}{E_{11}}, \quad \rho = \frac{m}{2k},$$

де

$$k = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}, \quad m = \frac{E_{11}}{G_{12}} - 2\nu_{12} \quad (n = \sqrt{m + 2k})$$

є коефіцієнтами характеристичного рівняння теорії пружності ортотропного тіла, $\mu^4 + m\mu^2 + k^2 = 0$.

Незалежними параметрами ортотропії оберемо M , k , ρ . Обертання (7) дає матрицю пружності, яку запишемо через ці сталі та сталу ν_{21} (її можна довільно обрати з множини можливих значень)

$$[D] = \frac{2\sqrt{2k(1+\rho)}}{M(1-\nu_{21}^2k^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{21} & 0 \\ \nu_{21} & k^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_{21}^2k^2}{2k(\rho + k\nu_{21})} \end{bmatrix}.$$

Потенціальні когезійні закони. Визначимо два закони для дослідження змішаного режиму руйнування шляхом поєднання законів для простих режимів руйнування (нормальний відрив та поперечний зсув) без параметрів змішаності.

Закон першого типу. Визначимо поле когезії за допомогою потенціалу (3):

$$f_1(x) = c_1^{-1} \int_0^x t_1(\xi) d\xi, \quad t_1(x) = \bar{T}_I(x, 0), \quad c_1 = \frac{\Phi_I}{\sigma_{\max} \Delta_I^*},$$

$$f_2(y) = c_2^{-1} \int_0^y t_2(\xi) d\xi, \quad t_2(y) = \bar{T}_{II}(0, y), \quad c_2 = \frac{\Phi_{II}}{\tau_{\max} \Delta_{II}^*}.$$

Тут $T_{I,II}$ є нормальними та тангенціальними зчепленнями, які визначаються частинними похідними потенціалу:

$$\bar{T}_I(\bar{\Delta}) = t_1(\bar{\Delta}_I)[1 - f_2(\bar{\Delta}_{II})], \quad \bar{T}_{II}(\bar{\Delta}) = [1 - \tilde{\phi} f_1(\bar{\Delta}_I)] t_2(\bar{\Delta}_{II}), \quad (8)$$

де $\tilde{\phi} = \phi_I / \phi_{II} < 1$ – відношення двох енергій руйнування. Параметри c_i характеризують форми когезійних законів простих режимів руйнування; розглядатимемо такі форми законів, для яких ці параметри ненабагато менші за одиницю (одиниця відповідає рівномірному закону). Як було зазначено у першому розділі, внаслідок недосконалості граничних умов для побудови потенціалу сил когезії, повне руйнування нормальним відривом відбувається при ненульовому тангенційному зчепленні ($\bar{T}_{II}(1, \bar{\Delta}_{II}) \neq 0$), що не відповідає фізичній природі руйнування.

При використанні числового методу розв'язання нелінійної системи МСЕ, побудованої для визначальних рівнянь (5)–(6), важливо знати матрицю Якобі цієї системи. Згідно з (8), частинні похідні функцій когезійного закону можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \{\bar{T}_I(x, y)\}'_x &= t'_1(x)[1 - f_2(y)], & \{\bar{T}_{II}(x, y)\}'_x &= -c_1^{-1} \tilde{\phi} t_1(x) t_2(y), \\ \{\bar{T}_I(x, y)\}'_y &= -c_2^{-1} t_1(x) t_2(y), & \{\bar{T}_{II}(x, y)\}'_y &= [1 - \tilde{\phi} f_1(x)] t'_2(y). \end{aligned}$$

Для числових прикладів, наведених нижче, згладжена трапеціодальна форма використана для законів простих режимів руйнування:

$$t_i(x) = \begin{cases} a_{1i}^{-1} x (2 - a_{1i}^{-1} x), & x \in [0, a_{1i}), \\ 1, & x \in [a_{1i}, a_{2i}], \\ (1-x)^2 (1+2x-3a_{2i})(1-a_{2i})^{-3}, & x \in (a_{2i}, 1] \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{і } c_i = \frac{1}{6} (3 - 2a_{1i} + 3a_{2i}),$$

$$f_i(x) = c_i^{-1} \begin{cases} a_{1i}^{-1} x^2 \left(1 - \frac{1}{3} a_{1i}^{-1} x\right), & x \in [0, a_{1i}), \\ x - \frac{1}{3} a_{1i}, & x \in [a_{1i}, a_{2i}], \\ a_{2i} - \frac{1}{3} a_{1i} + (1 - a_{2i})^{-3} \left[\frac{1}{2} (x^4 - a_{2i}^4) - (1 + a_{2i})(x^3 - a_{2i}^3) + 3a_{2i}(x^2 - a_{2i}^2) + (1 - 3a_{2i})(x - a_{2i}) \right], & x \in (a_{2i}, 1], \end{cases}$$

$$t'_i(x) = \begin{cases} 2a_{1i}^{-1} (1 - a_{1i}^{-1} x), & x \in [0, a_{1i}), \\ 0, & x \in [a_{1i}, a_{2i}] \\ -6(1-x)(x - a_{2i})(1 - a_{2i})^{-3}, & x \in (a_{2i}, 1]. \end{cases}$$

Закон другого типу. Розглянемо поле когезії, що генерує потенціал (4),

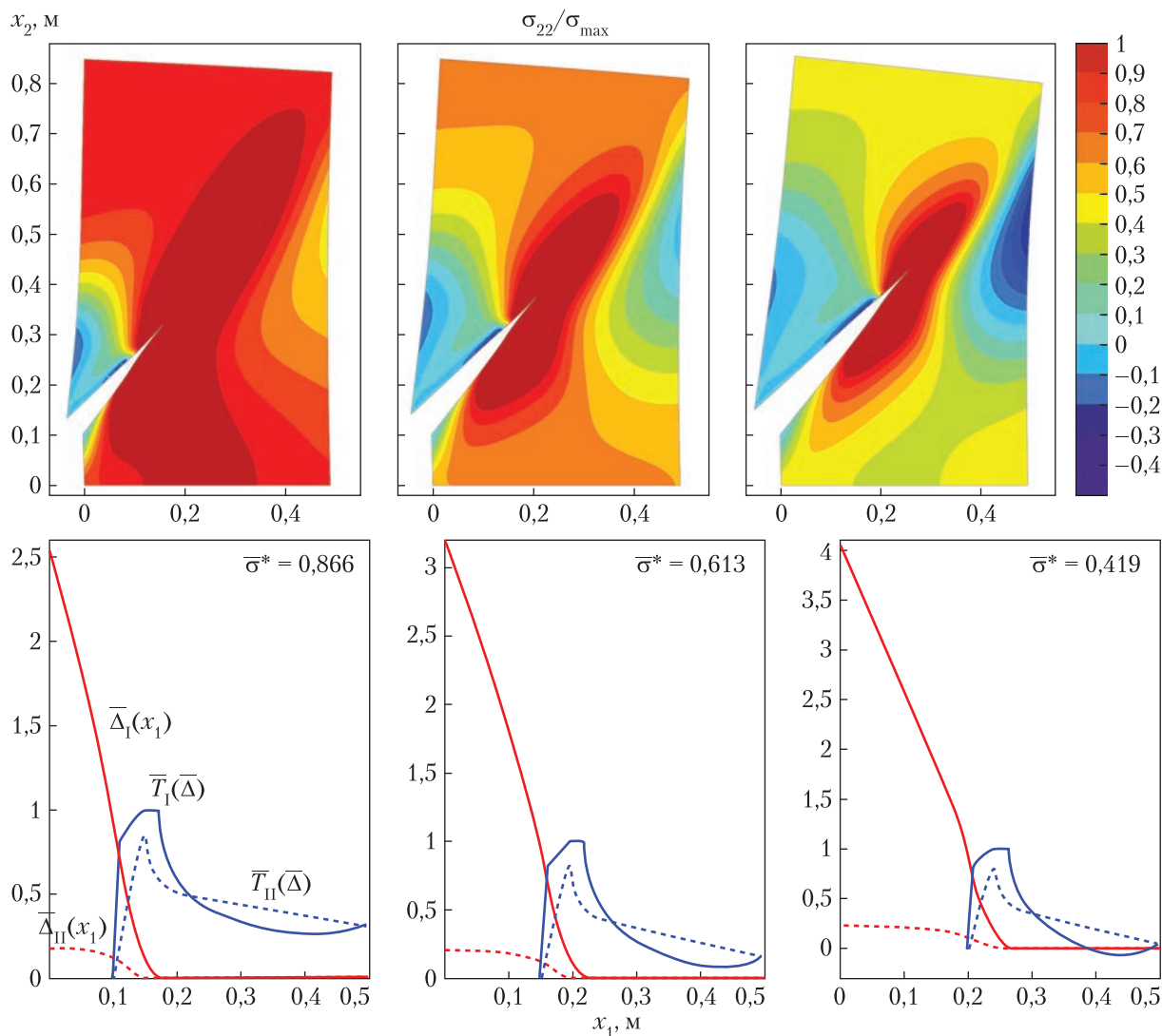


Рис. 2

$$\bar{T}_I(\bar{\Delta}) = t_1(\bar{\Delta}_I)[1 - \tilde{\phi}^{-1} f_2(\bar{\Delta}_{II})], \quad \bar{T}_{II}(\bar{\Delta}) = [1 - f_1(\bar{\Delta}_I)] t_2(\bar{\Delta}_{II}). \quad (10)$$

Частинні похідні цих функцій

$$\begin{aligned} \{\bar{T}_I(x, y)\}'_x &= t_1'(x)[1 - \tilde{\phi}^{-1} f_2(y)], & \{\bar{T}_{II}(x, y)\}'_x &= -c_1^{-1} t_1(x) t_2(y), \\ \{\bar{T}_I(x, y)\}'_y &= -c_2^{-1} \tilde{\phi}^{-1} t_1(x) t_2'(y), & \{\bar{T}_{II}(x, y)\}'_y &= [1 - f_1(x)] t_2'(y). \end{aligned}$$

Потенціал дає від'ємні нормальні когезійні зусилля для великих тангенціальних відривів. Щоб виправити цей недолік було запропоновано введення нового модельного параметра $\bar{\Delta}_{II}^*$ [11, 13] таким чином, щоб

$$f_2(\bar{\Delta}_{II}^*) = \tilde{\phi}$$

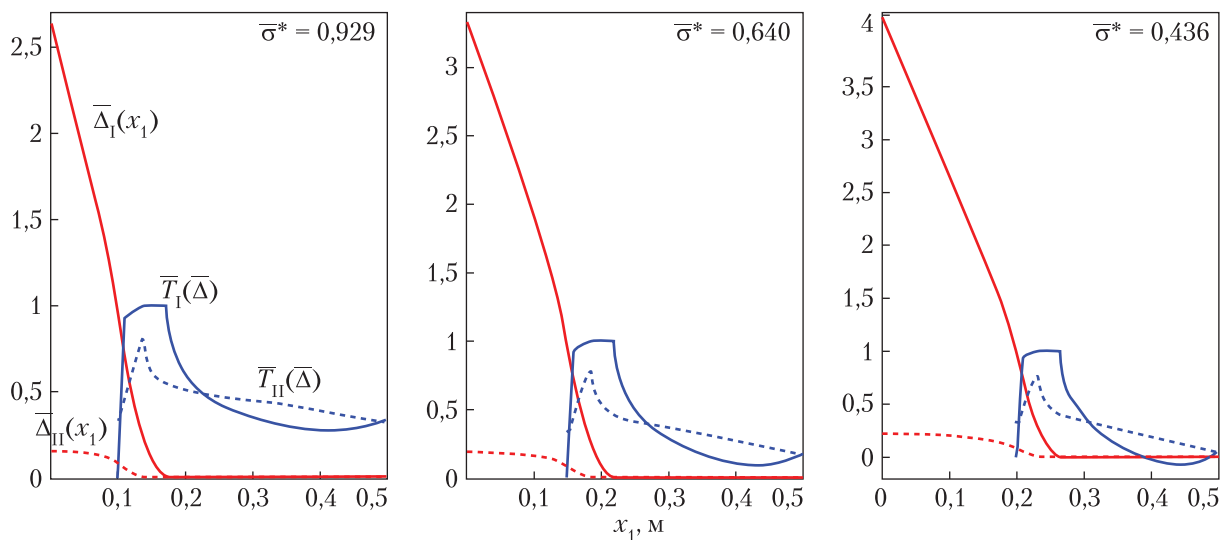


Рис. 3

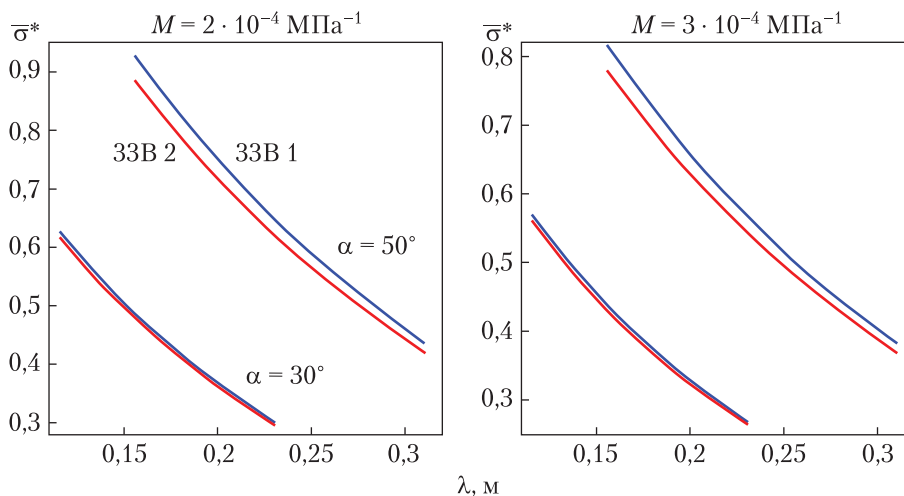


Рис. 4

і обчислювати нормальне зчеплення згідно з (10) тільки коли $\bar{\Delta}_{II} < \bar{\Delta}_{II}^*$, для інших значень $\bar{\Delta}_{II}$ ця величина покладається нулем:

$$\bar{T}_I(\bar{\Delta}) = 0, \quad 0 \leq \bar{\Delta}_I \leq 1, \quad \bar{\Delta}_{II}^* \leq \bar{\Delta}_{II} \leq 1. \quad (11)$$

Наприклад, для простого режиму руйнування з формою (9), для $a_{i1} = 0$ отримаємо $\bar{\Delta}_{II}^* = \tilde{\phi} c_2$, якщо $\tilde{\phi} < a_{i2}$.

Модифікація поля когезії (10) за допомогою (11) призводить до розбіжностей між енергією руйнування модифікованого закону і енергією, що задається потенціалом (4) для стану граничної рівноваги (між $\Psi(1, \bar{\Delta}_{II})$ і $\Psi(\bar{\Delta}_I, 1)$).

Числові результати. Для побудови сітки методу скінченних елементів використано десятиточкові трикутні елементи з ущільненням вздовж лінії розташування тріщини (рис. 1, з).

На рис. 2 проілюстровано поле відносного напруження $\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22} / \sigma_{\max}$ (перший рядок рисунків, де штрихами проілюстровано розкриття в зоні зчеплення) в стані граничної рівноваги, відповідні величини відносного критичного навантаження ($\bar{\sigma}^* = \sigma^* / \sigma_{\max}$), відносних значень розкриття та зчеплення (другий рядок рисунків). Розв'язки побудовано для когезійного закону другого типу, трьох довжин фізичної тріщини $\lambda \cos \alpha = 10, 15, 20$ см при наступних значеннях параметрів:

- 1) параметри тріщиностійкості $\phi_{I, II} = \{200, 300\}$ Н/м, $\{\sigma_{\max}, \tau_{\max}\} = \{4, 5\}$ МПа, $a_{1i} = 0, 005$, $a_{2i} = \{0, 7, 0, 6\}$;
- 2) параметри ортотропії $M = 2 \cdot 10^{-4}$ МПа $^{-1}$, $k^2 = 10$, $\rho = 4$;
- 3) геометричні параметри $A = 0,5$ м, $B = 0,8$ м, $C = 0,1$ м, $\alpha = 50^\circ$.

У всіх трьох прикладах руйнування відбувається нормальним відривом за порівняно незначного тангенціального розкриття.

На рис. 3 наведено відносні розкриття та зчеплення, отримані для когезійного закону першого типу з тими самими параметрами, що і в попередньому числовому прикладі. При повному руйнуванні нормальним відривом відносно тангенціальне зчеплення в вершині фізичної тріщини ($x'_1 = \lambda$) приймає значення $\tilde{\phi}$.

На рис. 4 представлені залежності безрозмірного критичного навантаження від довжини тріщини. Графіки побудовано для двох кутів нахилу тріщини, для значень $\lambda \cos \alpha$ з інтервалу від 10 до 20 см та двох значень параметра ортотропії M . Зі збільшенням цього параметра зменшується когезійна довжина і разом з нею розбіжності між результатами, що дають два когезійних закони. Для першого використаного значення M розбіжність для наведених результатів не перевищує 4,9 %. Зі зменшенням кута нахилу тріщини величина розбіжності між двома прогнозами зменшується. Так, для $\alpha = 30^\circ$ вона не перевищує 1,6 %.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*. 1960. **8**. P. 100–104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
2. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.* 1962. **7**. P. 55–129, [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2)
3. Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.* 1976. **6**, P. 773–81. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7)
4. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.* 2018. **212**. № 1. P. 113–121. <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0295-6>
5. Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.* 1987. **54**. P. 525–31. <https://doi.org/10.1115/1.3173064>
6. Селіванов М.Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 3. С. 46–54. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.046>
7. Селіванов М.Ф. Розв'язання задачі про крайову тріщину з зоною зчеплення шляхом регуляризації сингулярного інтегрального рівняння. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 5. С. 34–43. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.034>
8. Селіванов М.Ф. An edge crack with cohesive zone in orthotropic body. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 6. С. 25–34. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.06.025>
9. Selivanov M.F. Subcritical and critical states of a crack with failure zones. *Appl. Math. Model.* 2019. **72**. P. 104–128. [10.1016/j.apm.2019.03.013](https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.013)

10. Селіванов М.Ф., Процан В.В. Вплив неврахування умови плавності змикання берегів тріщини при визначенні критичного навантаження. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 3. С. 28–35. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.028>
11. Park K., Paulino G.H., Roesler J.R. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *J. Mech. Phys. Solids.* 2009. **57**. № 6, P. 891–908. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.10.003>
12. Park K., Paulino G.H. Cohesive zone models: A critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. *Appl. Mech. Reviews.* 2013. **64**. № 6. 060802–060802–20. <https://doi.org/10.1115/1.4023110>
13. Селіванов М.Ф., Черноіван Ю.О. Використання моделі складної зони зчеплення при дослідженні крайової тріщини змішаного режиму руйнування в ортотропному тілі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 11. С. 31–40. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.031>

Надійшло до редакції 28.04.2020

REFERENCES

1. Dugdale, D. S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8, pp. 100-104, [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
2. Barenblatt, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7, pp. 55-129. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2)
3. Hillerborg, A., Modeer, M. & Petersson, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.*, 6, pp. 773-81, [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7)
4. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2018). A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.*, 212, No. 1, pp. 113-121. <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0295-6>
5. Needleman, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.*, 54, pp. 525-31. <https://doi.org/10.1115/1.3173064>
6. Selivanov, M. F. (2019). An edge crack with cohesive zone. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 46-54 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.046>
7. Selivanov, M. F. (2019). Solving a problem on an edge crack with cohesive zone by the regularization of a singular integral equation. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 5, pp. 34-43 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.034>
8. Selivanov, M. F. (2019). An edge crack with cohesive zone in orthotropic body. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 6, pp. 25-34 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.06.025>
9. Selivanov, M. F. (2019). Subcritical and critical states of a crack with failure zones. *Appl. Math. Model.*, 72, pp. 104-128. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.013>
10. Selivanov, M. F. & Protsan, V. V. (2020). The impact of neglecting the smooth crack closure condition when determining the critical load. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 28-35 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.028>
11. Park, K., Paulino, G. H. & Roesler, J. R. (2009). A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 57, No. 6, pp. 891-908. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.10.003>
12. Park, K. & Paulino, G. H. (2013). Cohesive zone models: A critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. *Appl. Mech. Reviews*, 64, No. 6, 060802–060802–20. <https://doi.org/10.1115/1.4023110>
13. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2019). Application of the complex cohesive zone model to the edge mixed-mode crack problem for orthotropic media. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 11, pp. 31-40. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.031>

Received 28.04.2020

M.F. Selivanov, V.V. Protsan

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: mfs@ukr.net, overfiled@gmail.com

COMPARISON OF TWO POTENTIAL-BASED
COHESIVE MODELS TO PREDICT THE CRITICAL LOAD
OF A FINITE ORTHOTROPIC PLATE WITH OBLIQUE CRACK

The boundary-value problem of the theory of elasticity for a finite orthotropic plate with an oblique edge crack is considered. A tensile load is applied to a cracked body, and the crack is located along the orthotropy axis, which is not aligned with the loading direction.

A cohesive zone model for the mixed fracture mode is used to study crack growth mechanisms. The traction–separation laws are represented in the potential form. In this case, normal and tangential tractions are given by partial derivatives of the dissipation potential with respect to the corresponding separations. Two cohesive laws of different mixity forms are constructed basing on the pure-mode fracture models (normal separation and transverse shear) with no mode mixity parameters.

An algorithm for the determination of critical state parameters of a crack using the finite-element method is constructed. An example of the calculation of critical load parameters and the corresponding stress field for the two cohesive laws of mixed-mode fracture is given.

The impact of the mode-mixity form on the critical state parameters is studied. For the investigated range of orthotropic parameters, it is established that the mode-mixity of two cohesive laws well-known in the literature gives an error in determining the critical load to be less than five percent. This discrepancy decreases simultaneously with the cohesive length.

Keywords: *mixed-mode fracture, slanted edge crack, crack in orthotropic body, potential-based traction–separation law.*