

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.022>

УДК 517.9

**С.М. Чуйко**

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ

E-mail: [chujko-slav@ukr.net](mailto:chujko-slav@ukr.net)

## Узагальнення теореми Ньютона—Канторовича в банаховому просторі

*Представлено членом-кореспондентом НАН України В.Я. Гутлянським*

*Побудовано модифікацію класичного методу Ньютона—Канторовича в банаховому просторі. Для знаходження розв'язку нелінійного операторного рівняння отримано ітераційну схему із квадратичною збіжністю. Продемонстровано, що побудована модифікація методу Ньютона—Канторовича застосовна для знаходження наближень до розв'язків нелінійних інтегральних та диференціально-алгебраїчних крайових задач.*

**Ключові слова:** модифікований метод Ньютона—Канторовича, банахів простір, нелінійне операторне рівняння, квадратична збіжність.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо задачу про побудову розв'язків нелінійного операторного рівняння

$$F(z) = 0. \tag{1}$$

Оператор

$$F(z): B_1 \rightarrow B_2, \quad \Omega \subseteq B_1,$$

який діє з деякого банахова простору  $B_1$  до банахова простору  $B_2$ , вважаємо двічі неперервно диференційовним за  $z$  у деякій області  $\Omega$ . Припустимо, що оператор  $F$  має лінійну нетерову частину [1, 2]. Для знаходження розв'язку  $\tilde{z} \in \Omega$  нелінійного рівняння (1) побудуємо модифікацію класичного методу Ньютона [3–5]. Інтерес до розвитку методу Ньютона пов'язаний з його ефективним застосуванням для розв'язання нелінійних рівнянь, у тому числі в теорії нелінійних коливань [3–6], зокрема в теорії нелінійних нетерових крайових задач [1, 7–10]. Припустимо, що знайдено наближення  $z_k$ , досить близьке до розв'язку  $\tilde{z}$  рівняння (1). Розвинемо оператор  $F$  в околі точного розв'язку:

$$F(\tilde{z}) = F(z_k) + F'(z_k)(\tilde{z} - z_k) + R(\xi_k, \tilde{z} - z_k), \tag{2}$$

де

$$R(\xi_k, \tilde{z} - z_k) := \int_0^1 (1-s) d^2 F(\xi_k, \tilde{z} - z_k) ds, \quad \xi_k := \tilde{z} + s(\tilde{z} - z_k);$$

© С.М. Чуйко, 2018

тут  $\xi_k$  – точка, розташована між точками  $\tilde{z}$  та  $z_k$ ;  $F'$  – похідна за Фреше; лінійний неперервний нетерів оператор [3, с. 636]:

$$\dim N(F') - \dim N(F'^*) = s - k < \infty.$$

У малому околі точного розв'язку має місце наближена рівність  $F(z_k) + F'(z_k)(\tilde{z} - z_k) \approx 0$ , тому для знаходження нижченаведеного наближення до точного розв'язку природно покласти

$$F(z_k) + F'(z_k)(z_{k+1} - z_k) = 0, \quad (3)$$

звідки за умови

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := F'(z_k) \quad (4)$$

знаходимо

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ F(z_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Тут  $P_{J_k^*} : B_2 \rightarrow \ker(J_k^*)$  – ортопроектор на нуль-простір спряженого оператора  $J_k^*$ ;  $J_k^+$  – псевдообернений оператор [1]. Зазначимо, що умова (4) рівнозначна вимозі повноти рангу оператора  $J_k$ .

**2. Ітераційна схема.** Ітераційна схема (5) збігається до точного розв'язку  $\tilde{z}$ . Дійсно, припустимо, що в околі  $\tilde{z}$  мають місце нерівності  $\|J_k^+\| \leq \sigma_1(k)$  та

$$\|d^2 F(\xi_k, \tilde{z} - z_k)\| \leq \sigma_2(k) \|\tilde{z} - z_k\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Із рівностей (2) і (3) випливає, що  $F'(z_k)(\tilde{z} - z_k) = -R(\xi_k, \tilde{z} - z_k)$ , отже

$$\|\tilde{z} - z_{k+1}\| \leq \frac{1}{2} \sigma_1(k) \sigma_2(k) \|\tilde{z} - z_k\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Припустимо, що існує константа

$$\theta := \sup_{k \in \mathbb{N}} \left( \frac{1}{2} \sigma_1(k) \sigma_2(k) \right).$$

За цієї умови має місце оцінка

$$\|\tilde{z} - z_{k+1}\| \leq \theta \|\tilde{z} - z_k\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

яка свідчить про те, що у випадку збіжності ітераційної схеми (5) до точного розв'язку  $\tilde{z}$  рівняння (1), ця збіжність – квадратична. Знайдемо умову збіжності ітераційної схеми (5) до точного розв'язку рівняння (1); для цього зробимо такі оцінки

$$\begin{aligned} \|\tilde{z} - z_1\| &\leq \theta \|\tilde{z} - z_0\|^2, \quad \|\tilde{z} - z_2\| \leq \theta^{1+2} \|\tilde{z} - z_0\|^{2^2}, \dots, \\ \|\tilde{z} - z_k\| &\leq \theta^{1+2+\dots+2^{k-1}} \|\tilde{z} - z_0\|^{2^k}, \dots \end{aligned}$$

Таким чином, має місце нерівність, аналогічна [5]

$$\|\tilde{z} - z_k\| \leq \frac{1}{\theta} (\theta \|\tilde{z} - z_0\|)^{2^k}, \dots,$$

яка свідчить про збіжність ітераційної схеми (5) до точного розв'язку  $\tilde{z}$  рівняння (1) за умови

$$\theta \|\tilde{z} - z_0\| < 1. \quad (6)$$

На практиці останню нерівність можна замінити на  $\theta \|z_k - z_0\| < 1$ . Отже, доведено таке твердження.

**Теорема.** *Припустимо, що для рівняння (1) виконуються такі умови.*

1. *Нелінійний оператор  $F(z): B_1 \rightarrow B_2$ , який діє з банахова простору  $B_1$  до банахова простору  $B_2$ , двічі неперервно диференційовний за  $z$  в області  $\Omega \subseteq B_1$  та має лінійну нетерову частину.*

2. *В околі нульового наближення  $z_0 \in \Omega$  мають місце нерівності*

$$\|J_k^+\| \leq \sigma_1(k) \text{ та } \|d^2F(\xi_k, \tilde{z} - z_k)\| \leq \sigma_2(k) \|\tilde{z} - z_k\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3. *Існує константа  $\theta$ .*

*Тоді за умов (4) та (6) для знаходження розв'язку рівняння (1) застосовна ітераційна схема (5), при цьому швидкість збіжності послідовності до розв'язку рівняння (1) квадратична.*

Доведена теорема узагальнює відповідні результати [3, 5] на випадок довільного нетерова оператора і стане в нагоді у теорії нелінійних нетерових крайових задач [1, 7, 8, 10], зокрема в теорії нелінійних інтегральних крайових задач [2, 3, 9, 11]. З іншого боку, доведена теорема узагальнює відповідні результати [12], отримані для нелінійної вектор-функції  $F(z): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  у випадку  $m \neq n$ .

**3. Знаходження розв'язків інтегральних крайових задач.** Розглянемо задачу про побудову розв'язків  $z(t) := (u(t)v(t)w(t))^* \in C^1[0; 1]$  задачі Коші для нелінійного диференціального-алгебраїчного рівняння

$$Az'(t) = f(z(t)), \quad z(0) = \alpha, \quad (7)$$

де

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(z(t)) := \begin{pmatrix} u^2(t) + w^2(t) \\ v^2(t) + w^2(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha := \frac{1}{10} (110)^*.$$

Поставлена задача рівнозначна задачі про побудову розв'язків  $z(t) \in C[0, 1]$  нелінійного інтегрального рівняння

$$Az(t) = \int_0^t f(z(s)) ds + \beta, \quad \beta := \frac{1}{10} (11)^*. \quad (8)$$

Інтегральне рівняння (2) визначає інтегральний оператор

$$F(z(t)) := Az(t) - \int_0^t f(z(s)) ds - \beta: \quad \mathbb{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}[0, 1],$$

який задовольняє вимоги доведеної теореми. У зазначеному просторі інтегральний оператор  $F(z(t))$  двічі диференційовний:

$$F'_z(z(t)) = A - \int_0^t f'_z(z(s)) ds, \quad F''_z(z(t)) = - \int_0^t f''_z(z(s)) ds.$$

Тут

$$f'_z(z(s)) = 2 \begin{pmatrix} u(t) & 0 & w(t) \\ 0 & v(t) & w(t) \end{pmatrix}, \quad df(z(t)) = 2 \begin{pmatrix} u(t) & 0 & w(t) \\ 0 & v(t) & w(t) \end{pmatrix} dz(t),$$

крім того,

$$dz(t) = (du(t) \quad dv(t) \quad dw(t))^*.$$

Далі

$$d^2 f(z(t)) = 2 \begin{pmatrix} du(t) & 0 & dw(t) \\ 0 & dv(t) & dw(t) \end{pmatrix},$$

$$dz(t) = 2 \begin{pmatrix} d^2 u(t) + d^2 w(t) \\ d^2 v(t) + d^2 w(t) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо нерівність

$$\|d^2 F(\xi_k; \tilde{z} - z_k)\| \leq 4 \cdot \|\tilde{z} - z_k\|^2,$$

отже,  $\sigma_2(k) = 4$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Покладемо для визначеності

$$u_0(t) := v_0(t) := \frac{1}{10} + \frac{t}{100} + \frac{t}{1000}, \quad w_0(t) = 0.$$

Початкове наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_0(t)) := Az_0(t) - \int_0^t f(z_0(s)) ds - \beta = -\frac{t^3(500 + 25t + t^2)}{5\,000\,000} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

похідна якого

$$F'(z_0(t)) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5-t-\frac{t^2}{20}-\frac{t^3}{300} & 0 & 0 \\ 0 & 5-t-\frac{t^2}{20}-\frac{t^3}{300} & 0 \end{pmatrix} \text{— матриця повного рангу.}$$

Отже, для початкового значення невідомої умову (4) виконано, тому знаходимо

$$z_1(t) = z_0(t) - J_0^+ F(z_0(t)) = \frac{-1\,500\,000 + 150\,000t + 30\,000t^2 + 4\,000t^3 + 175t^4 + 7t^5}{10\,000(-1500 + 300t + 15t^2 + t^3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$\| \| z_1(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000188482.$$

Перше наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_1(t)) := Az_1(t) - \int_0^t f(z_1(s)) ds - \beta,$$

похідна якого  $F'(z_1(t))$  — матриця повного рангу. Отже, для першого наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того,  $\| J_1^+ \| \leq \sigma_1(1) \approx 1,26699$ , тому знаходимо

$$\theta_1 \cdot \| \| z_1(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000477611 \ll 1,$$

де

$$\theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2}.$$

Таким чином, маємо

$$z_2(t) = z_1(t) - J_1^+ F(z_1(t)) \approx \left\{ \frac{1}{10} - \frac{24854086t}{524712893} + \frac{57864781t^2}{11838356065} + \frac{1614355t^3}{10856545956} + \frac{55293t^4}{56238206284} - \frac{72973t^5}{42889516970} \right\} \left[ 1 - \frac{160658827t}{280054337} + \frac{22496936t^2}{233743901} - \frac{4914775t^3}{1445131398} - \frac{891626t^4}{6420726543} + \frac{98929t^5}{16480952675} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\| z_2(t) - z_0(t) \|_{C[0,1]} \approx 0,000150384.$$

Друге наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_2(t)) := Az_2(t) - \int_0^t f(z_2(s)) ds - \beta,$$

похідна якого  $F'(z_2(t))$  — матриця повного рангу. Отже, для другого наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того,  $\| J_2^+ \| \leq \sigma_1(2) \approx 1,26698$ , тому знаходимо

$$\theta_2 \cdot \| \| z_2(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000381067 \ll 1,$$

де

$$\theta_2 := \frac{\sigma_1(2)\sigma_2(2)}{2}.$$

Таким чином, отримуємо

$$z_3(t) = z_2(t) - J_2^+ F(z_2(t)) \approx \left\{ \frac{1}{10} - \frac{58t}{875} + \frac{23\,260\,196t^2}{1\,865\,722\,403} - \frac{882\,887t^3}{4\,303\,375\,297} - \frac{713\,837t^4}{12\,165\,647\,555} - \frac{10\,574\,608\,762t^5}{2\,643\,652\,190\,499\,999} \right\} \left\{ 1 - \frac{12\,182\,989\,873\,378t}{15\,970\,211\,444\,503} + \frac{268\,869\,282t^2}{1\,408\,009\,763} - \frac{9\,212\,507t^3}{634\,525\,197} - \frac{1\,370\,661t^4}{3\,591\,850\,925} + \frac{237\,563t^5}{12\,719\,923\,270} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\| \| z_3(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000\,158\,656.$$

Третє наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_3(t)) := Az_3(t) - \int_0^t f(z_3(s)) ds - \beta,$$

похідна якого  $F'(z_3(t))$  – матриця повного рангу. Отже, для третього наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того,  $\| J_3^+ \| \leq \sigma_1(3) \approx 1,26\,698$ , тому знаходимо

$$\theta_3 \cdot \| \| z_3(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000\,402\,028 \ll 1,$$

де

$$\theta_3 := \frac{\sigma_1(3)\sigma_2(3)}{2}.$$

Таким чином, одержуємо

$$z_4(t) = z_3(t) - J_3^+ F(z_3(t)) \approx \left\{ \frac{1}{10} - \frac{158\,687\,237\,287t}{1716\,310\,813\,379} + \frac{7\,902\,959t^2}{265\,060\,490} - \frac{7\,268\,503t^3}{2106\,715\,632} - \frac{198\,044t^4}{13\,895\,580\,547} + \frac{269\,342t^5}{20\,870\,001\,053} + \frac{241\,270\,750t^6}{351\,853\,177\,083\,333} \right\} \times \left\{ 1 - \frac{2\,773\,024\,710\,114t}{2\,706\,490\,160\,339} + \frac{141\,824\,439t^2}{363\,079\,726} - \frac{15\,307\,703t^3}{238\,003\,009} + \frac{5\,772\,711t^4}{1745\,268\,151} + \frac{4\,071\,431t^5}{28\,410\,093\,353} - \frac{107\,305t^6}{17\,740\,590\,717} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\| \| z_4(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000\,156\,782.$$

Четверте наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_4(t)) := Az_4(t) - \int_0^t f(z_4(s)) ds - \beta,$$

похідна якого  $F'(z_4(t))$  — матриця повного рангу. Отже, для четвертого наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того,  $\|J_4^+\| \leq \sigma_1(4) \approx 1,26698$ , тому знаходимо

$$\theta_4 \cdot \| \| z_4(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000397278 \ll 1,$$

де

$$\theta_4 := \frac{\sigma_1(4)\sigma_2(4)}{2}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\begin{aligned} z_5(t) &= z_4(t) - J_4^+ F(z_4(t)) \approx \\ &\approx \left\{ \frac{1}{10} - \frac{52534856695t}{442630524044} + \frac{13165626t^2}{243382597} - \frac{7162541t^3}{635163610} + \frac{2042711t^4}{2311774103} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{215168t^5}{11040687289} - \frac{80217t^6}{26417913281} - \frac{8397319t^7}{69977658333333} \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{167715715017t}{130327564091} + \frac{117817661t^2}{178611349} - \frac{29319557t^3}{175712222} + \frac{13922546t^4}{692222983} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2418728t^5}{3511890045} - \frac{338660t^6}{6793135723} + \frac{69247t^7}{37706734709} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

при цьому

$$\| \| z_5(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000157219.$$

Зазначимо також, що і початкове значення, і перші п'ять наближень до невідомої задовольняють умову Коші:  $z_k(0) = \alpha$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . П'яте наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_5(t)) := Az_5(t) - \int_0^t f(z_5(s)) ds - \beta,$$

похідна якого  $F'(z_5(t))$  — матриця повного рангу. Отже, для п'ятого наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того,  $\|J_5^+\| \leq \sigma_1(4) \approx 1,26698$ , тому знаходимо

$$\theta_5 \cdot \| \| z_5(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000397278 \ll 1,$$

де

$$\theta_5 := \frac{\sigma_1(5)\sigma_2(5)}{2}.$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку задачі Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) визначимо відхилення перших п'яти наближень:

$$\Delta_k := \| \| Az_k(t) - f(z_k(t)) \|_\infty \|_{C[0; 2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Таким чином, пересвідчуємося в зменшенні нульової та перших п'яти відхилень від ітерації до ітерації:

$$\Delta_0 \approx 0,000\,321, \quad \Delta_1 \approx 0,0000\,935\,517, \quad \Delta_2 \approx 0,0000\,265\,764,$$

$$\Delta_3 \approx 7,44\,232 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_4 \approx 2,06\,541 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_5 \approx 5,69\,721 \cdot 10^{-7}.$$

Для незалежної оцінки точності знайдених наближень до розв'язку задачі Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) визначимо відхилення перших п'яти наближень до розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (2):

$$\delta_k := \| \| Az_k(t) - \int_0^t f(z_k(s)) ds - \beta \|_\infty \|_{C[0; 2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Таким чином, пересвідчуємося в зменшенні нульової та перших п'яти відхилень від ітерації до ітерації:

$$\delta_0 \approx 0,000\,148\,775, \quad \delta_1 \approx 0,0000\,212\,625, \quad \delta_2 \approx 4,61\,648 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_3 \approx 1,04\,598 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_4 \approx 2,43\,778 \cdot 10^{-7}, \quad \delta_5 \approx 5,79\,623 \cdot 10^{-8}.$$

Зазначимо також, що задача Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) у припущенні  $w(t) \equiv 0$  рівнозначна задачі Коші для скалярного звичайного диференціального рівняння

$$u'(t) = u^2(t), \quad u(0) = \frac{1}{10}, \tag{9}$$

розв'язок якого  $u(t) = (10-t)^{-1}$ . Отже, задача Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) має частинний розв'язок

$$u(t) = v(t) = \frac{1}{10-t}, \quad w(t) \equiv 0,$$

що дає змогу оцінити точність знайдених наближень до розв'язку задачі Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (9):

$$\| \| z_0(t) - z(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,000\,111\,111, \quad \| \| z_1(t) - z(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 0,0000\,313\,473,$$

$$\| \| z_2(t) - z(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 4,77\,342 \cdot 10^{-6}, \quad \| \| z_3(t) - z(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 1,07\,555 \cdot 10^{-6},$$

$$\| \| z_4(t) - z(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 2,49\,666 \cdot 10^{-7}, \quad \| \| z_5(t) - z(t) \|_\infty \|_{C[0,1]} \approx 5,91\,861 \cdot 10^{-8}.$$

Доведена теорема буде корисною в теорії нелінійних нетерових крайових задач [1, 3, 7–11], а також у теорії нелінійних крайових задач у частинних похідних [2, 13–15].

*Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України. Номер державної реєстрації 0115U003182.*



## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. 2th ed. Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. 298 p.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1991. 277 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва: Наука. 1977. 744 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1969. 248 с.
5. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. Москва: Мир. 1988. 440 с.
6. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике. *Труды ИСА РАН*. 2006. **28**. С. 48–66.
7. Chuiko S.M., Boichuk I.A. Autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations*. 2009. **12**, Iss. 3. P. 417–428.
8. Chuiko S.M., Boichuk I.A., Pirus O.E. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton–Kantorovich method. *J. Math. Sci.* 2013. **189**, № 5. P. 867–881.
9. Boichuk A.A., Holovats'ka I.A. Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. *J. Math. Sci.* 2014. **203**. № 3. P. 306–321.
10. Chuiko S.M., Pirus O.E. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. *J. Math. Sci.* 2013. **191**, № 3. P. 449–464.
11. Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А. Крайові задачі для систем лінійних інтегродиференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. *Укр. мат. журн.* 1996. **48**, № 11. С. 1576–1579.
12. Chuiko S.M. To the generalization of the Newton–Kantorovich theorem. *Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. матем., прикл. матем. і механіка*. 2017. **85**. P. 62–68.
13. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Solutions of the Schrödinger equation in a Hilbert space. *Boundary Value Problems*. 2014. doi: <https://doi.org/10.1186/1687-2770-2014-4>
14. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation: a geometric approach. New York etc.: Springer, 2012. 314 p. (Developments in Mathematics; Vol. 26.).
15. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E. Toward the theory of the Dirichlet problem for the Beltrami equations. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2015. № 11. С. 23–29. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.11.023>

Надійшло до редакції 29.01.2018

## REFERENCES

1. Boichuk, A. A. & Samoilenko, A. M. (2004). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Berlin; Boston: Walter de Gruyter.
2. Azbelev, N. V., Maksimov, V. P. & Rakhmatullina, L. F. (1991). An introduction to the theory of functional differential equations. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1977). Functional analysis. Moscow: Nauka (in Russian).
4. Bogolyubov, N. N., Mitropol'skii, Yu. A. & Samoilenko, A. M. (1969). Method of accelerated convergence in nonlinear mechanics. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
5. Dennis, J. E. & Schnabel, R. B. (1996). Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Colorado: Society for Industrial and Applied Mathematics.
6. Polyak, B. T. (2006). Newton's method and its role in optimization and computational mathematics. Trudy ISA RAN, 28, pp. 48-66 (in Russian).
7. Chuiko, S.M., Boichuk, I.A. (2013). Autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations*. 2009, 12, Iss. 3, pp. 417-428.
8. Chuiko, S. M., Boichuk, I. A., & Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton–Kantorovich method. *J. Math. Sci.*, 189, No. 5, pp. 867-881.
9. Boichuk, A. A. & Holovats'ka, I. A. (2014). Boundary-value problems for systems of integro-differential equations. *J. Math. Sci.*, 203, No. 3, pp. 306-321.

10. Chuiko, S. M. & Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. *J. Math. Sci.*, 191, No. 3, pp. 449-464.
11. Samoilenko, A. M., Boichuk, A. A., & Krivosheya, S. A. (1996). Boundary-value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel. *Ukr. Math. J.*, 48, No. 11, pp. 1785-1789.
12. Chuiko, S. M. (2017). To the generalization of the Newton—Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”*, 85, pp. 62-68.
13. Boichuk, A. A., & Pokutnyi, A. A. (2014). Solutions of the Schrödinger equation in a Hilbert space. *Boundary Value Problems*. doi: <https://doi.org/10.1186/1687-2770-2014-4>
14. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2012). *The Beltrami equation: a geometric approach, developments in mathematics*, Vol. 26. New York etc: Springer.
15. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V. & Yakubov, E. (2015) Toward the theory of the Dirichlet problem for the Beltrami equations. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 11, pp. 23-29. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi.2015.11.023>

Received 29.01.2018

*С.М. Чуйко*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск

E-mail: [chujko-slav@ukr.net](mailto:chujko-slav@ukr.net)

#### ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НЬЮТОНА—КАНТОРОВИЧА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Построена модификация классического метода Ньютона—Канторовича в банаховом пространстве. Для нахождения решения нелинейного операторного уравнения предложена итерационная схема с квадратичной сходимостью. Построен пример, иллюстрирующий применимость модифицированного метода Ньютона—Канторовича для нахождения приближений к решениям нелинейных интегральных и дифференциально-алгебраических краевых задач.

**Ключевые слова:** *модифицированный метод Ньютона—Канторовича, банахово пространство, нелинейные операторные уравнения, квадратичная сходимость.*

*S.M. Chuiko*

Donbas State Pedagogical University, Slov'yansk

E-mail: [chujko-slav@ukr.net](mailto:chujko-slav@ukr.net)

#### A GENERALIZATION OF THE NEWTON—KANTOROVICH THEOREM IN A BANACH SPACE

We present a modification of the Newton—Kantorovich method for nonlinear operator equations in a Banach space. We prove, under certain conditions, that this modified Newton—Kantorovich method has quadratic convergence. The modified Newton—Kantorovich method is used to solve some nonlinear integral and integral-differential equations.

**Keywords:** *modification of the Newton—Kantorovich method, Banach space, nonlinear operator equations, quadratic convergence.*