

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.040>

УДК 539.3

**А.Н. Гузь, А.М. Багно**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

## **Об акустических волнах в слое вязкой жидкости, взаимодействующем с упругим полупространством**

*Представлено академиком НАН України А.Н. Гузем*

*Рассмотрена задача о распространении акустических волн в слое вязкой сжимаемой жидкости, взаимодействующем с упругим полупространством. Исследование проведено на основе трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Навье – Стокса для вязкой сжимаемой жидкости. Применены постановка задачи и подход, основанные на использовании представлений общих решений линеаризованных уравнений для упругих тел и жидкости. Получено дисперсионное уравнение, описывающее распространение гармонических волн в гидроупругой системе. Построены дисперсионные кривые для нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние толщины слоя вязкой сжимаемой жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания акустических волн. Показано, что влияние вязкости жидкости на параметры волнового процесса связано со свойствами локализации волн. Разработанный подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить границы применения модели идеальной сжимаемой жидкости. Численные результаты приведены в виде графиков и дан их анализ.*

**Ключевые слова:** акустические волны, фазовая скорость, коэффициент затухания, упругое полупространство, слой вязкой сжимаемой жидкости.

Задача о распространении квазилэмбовских волн в гидроупругом волноводе принадлежит к классическим задачам механики. Вместе с тем, являясь многопараметрической, она изучена недостаточно полно и ряд вопросов до настоящего времени остаются актуальными. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости, для более сложной трехкомпонентной упруго-жидкостной слоисто-неоднородной структуры, а также с привлечением более общих моделей твердых и жидких сред, приведены в [1–10]. В частности, в работах [2, 3] импедансным методом выполнен расчет поля точечного источника и характеристик нормальных волн на основе матричных уравнений Риккати для слоисто-неоднородной среды. Статья [4] посвящена исследованию свойств функции Грина и применению ее к изучению динамических свойств слоисто-неоднородного полупространства. Теоретические методы, применяемые для изучения волн Лэмба в анизотропных пластинах проанализированы в обзоре [5]. Результаты,

полученные с применением линеаризованной теории, учитывающей начальные напряжения в упругом теле и вязкость жидкости, содержатся в публикациях [6, 10]. Значительное практическое использование поверхностных волн ставит задачу более полного учета свойств реальных упругих и жидких сред. К числу таких факторов принадлежит такое свойство жидкости, как вязкость.

В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик акустических волн в гидроупругих волноводах в широком интервале частот используются трехмерные линеаризованные уравнения Навье–Стокса для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость является ньютоновской, находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и упругого тела, предложенные в работах [7–9, 11–14].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из изотропного упругого полупространства и слоя вязкой сжимаемой жидкости. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье–Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы упругое тело – вязкая сжимаемая жидкость принимают такой вид:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad \sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \mathbf{v}^* \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const};$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial z_j} + \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial z_i} \right), \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (3)$$

В (1)–(3) введены следующие обозначения:  $u_i$  – компоненты вектора перемещений твердого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  – плотность материала упругого полупространства;  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ляме материала твердого тела;  $\mathbf{v}_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ;  $\rho^*$  и  $p$  – возмущения плотности и давления в жидкости;  $\mathbf{v}^*$  и  $\mu^*$  – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $P_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  – составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле.

Равенства (1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя и без учета тепловых эффектов, описывают соотношения (2) и (3).

Далее предположим, что упругое полупространство занимает объем:  $-\infty < z_1 < \infty, -\infty < z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 \leq h, -\infty < z_3 < \infty$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1)–(3) при следующих граничных условиях

$$\sigma_{12}|_{z_2=0} = P_{12}|_{z_2=0}; \sigma_{22}|_{z_2=0} = P_{22}|_{z_2=0}; P_{12}|_{z_2=h} = 0; P_{12}|_{z_2=h} = 0; \quad (4)$$

$$v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (5)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и вязкой сжимаемой жидкости, предложенными в работах [7–9, 11–14]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные потенциалы  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4v^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \left[ \frac{\partial}{\partial t} - v^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн

$$\chi_i = X_i(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (i = \overline{1, 3}),$$

где  $k$  ( $k = \beta + i\gamma$ ) – волновое число;  $\gamma$  – коэффициент затухания волны;  $\omega$  – круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находим соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (4) и (5) получаем однородную систему линейных алгебраиче-

ских уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn}(c, \gamma, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \right\| = 0, \quad (6)$$

где  $c$  — фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h$  — толщина слоя жидкости;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) — скорость волны сдвига в упругом теле.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и поперечная волны. В идеальной сжимаемой жидкости распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободной граничной поверхности, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (6) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 6, 10, 12–14]. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (6) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью. Если  $\mu^*$  принять равным нулю, то из (6) получим результаты для гидроупругой системы с идеальной жидкостью [1, 6, 10, 14]. Устремив  $h$  к бесконечности, получим соотношение для определения скорости поверхности волны Стоунли–Шольте [1, 6, 10, 12, 14]. При  $\rho_0 = 0$  равенство (6) перейдет в уравнение Рэлея [1, 6, 10, 12–14].

**Числовые результаты.** В дальнейшем дисперсионное уравнение (6) решаем численно. При этом расчеты проводим для двух гидроупругих систем. Первая состоит из оргстекла и воды. Она характеризуется следующими параметрами: упругое полупространство —  $\rho = 1160 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; слой жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м}/\text{с}$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ . У этого волновода материал упругого тела (оргстекло) является менее жестким. Вторая представляет собой волновод из стали марки 09Г2С и воды. При этом параметры выбираем такими: упругое тело —  $\rho = 7800 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ; жидкость —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м}/\text{с}$ ,  $\bar{a}_0 = 0,463021$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого тела (сталь) относится к разряду более жестких.

Результаты вычислений представлены в виде графиков на рис. 1–4. При этом на рис. 1 и 2 приведены графики для упругого полупространства из оргстекла (менее жесткий материал) и воды ( $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ ). Графики для упругого полупространства из стали марки 09Г2С (более жесткий материал) и воды ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) представлены на рис. 3 и 4.

На рис. 1, *a* и 3, *a* изображены дисперсионные кривые для гидроупругих волноводов, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины слоя жидкости  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . На этих рисунках для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первых мод при возрастании толщины жидкого слоя  $\bar{h}$ .

На рис. 1, *б* и 3, *б* приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  — волновое число волны сдвига в материале упругого полупространства) от безразмерной величины толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  и  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

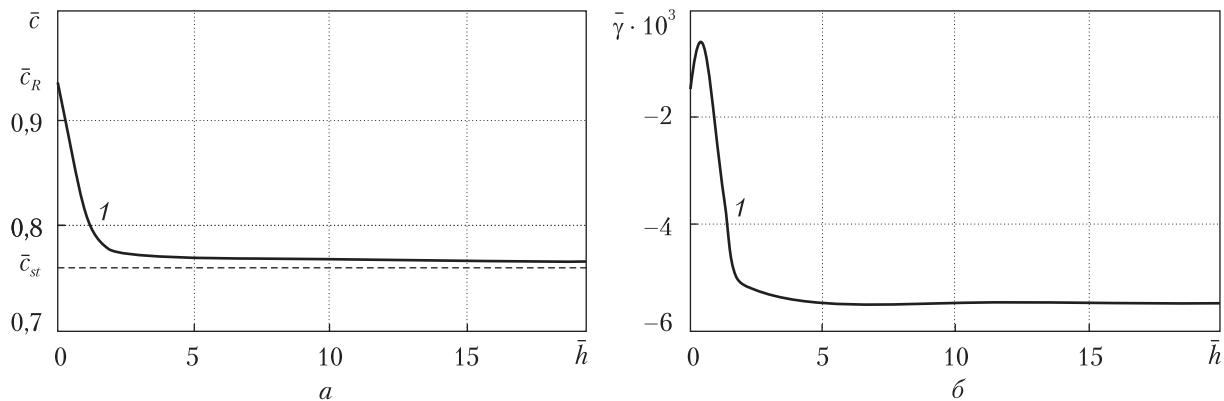


Рис. 1

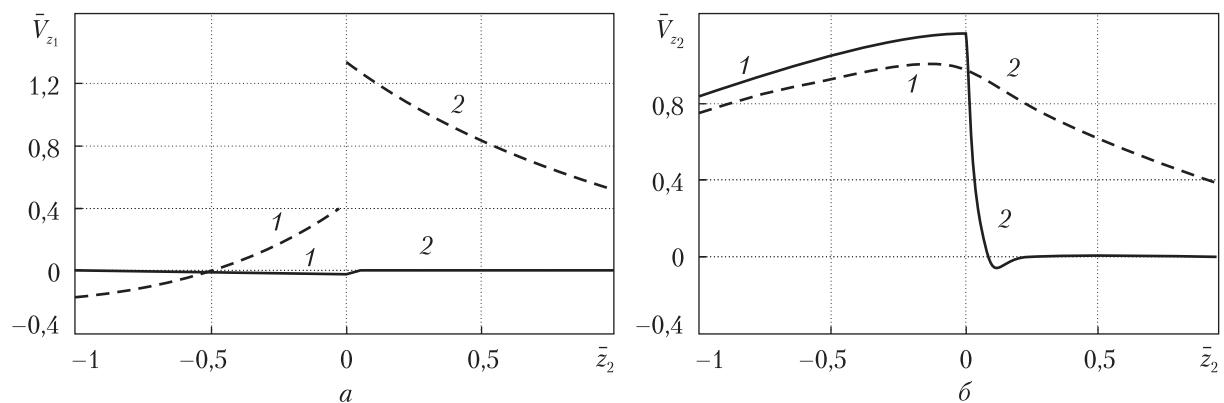


Рис. 2

Графики, представленные на рис. 2, отражают распределение смещений для гидроупругого волновода, состоящего из оргстекла ( $\bar{z}_2 \leq 0$ ) и воды ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$ ). На них приведены зависимости нормированных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 2, а) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 2, б) смещений (скоростей  $du_i/dt$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для поверхностной волны 1 (рис. 1, а). При нормировании величины указанных смещений отнесены к их наибольшим значениям  $|\bar{V}_{z_1} \max|$  и  $|\bar{V}_{z_2} \max|$ . Аналогичные зависимости для гидроупругой системы: сталь (более жесткий материал) – вода приведены на рис. 4.

Графики, представленные на рис. 2 и 4, получены для первой низшей квазиволновой моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине)  $\bar{h} = 20$ . При этом графики, обозначенные сплошными линиями, получены для гидроупругой системы с вязкой жидкостью ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ). Штриховые линии иллюстрируют распределение смещений (скоростей) для упругого полупространства, взаимодействующего со слоем идеальной жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ). Отметим, что разрыв продольных смещений  $\bar{V}_{z_1}$  в упругом теле (кривая 1) и в идеальной жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ( $\bar{z}_2 = 0$ ) (рис. 2, а и 4, а) (штриховые линии) обусловлен невязкостью (идеальностью) жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ).

**Анализ числовых результатов.** Из графика, представленного на рис. 1, а, следует, что скорость поверхностной волны в упругом полупространстве из оргстекла (менее жесткий

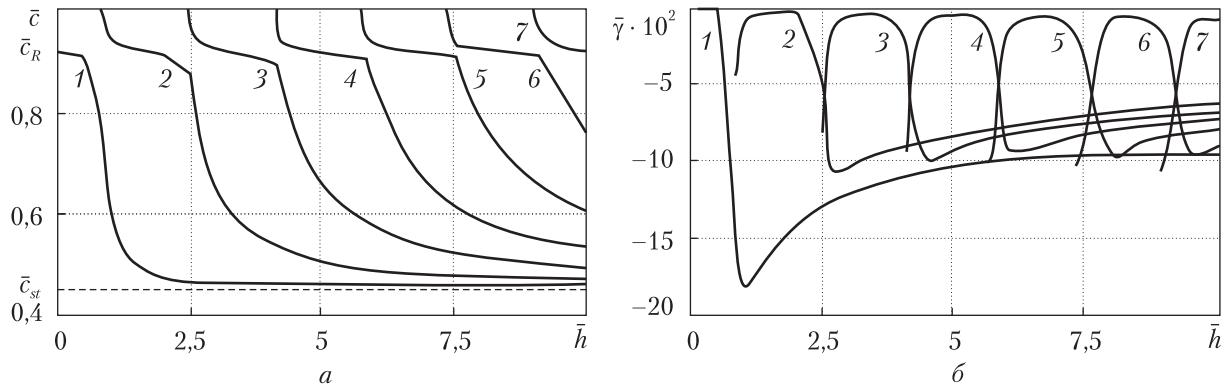


Рис. 3

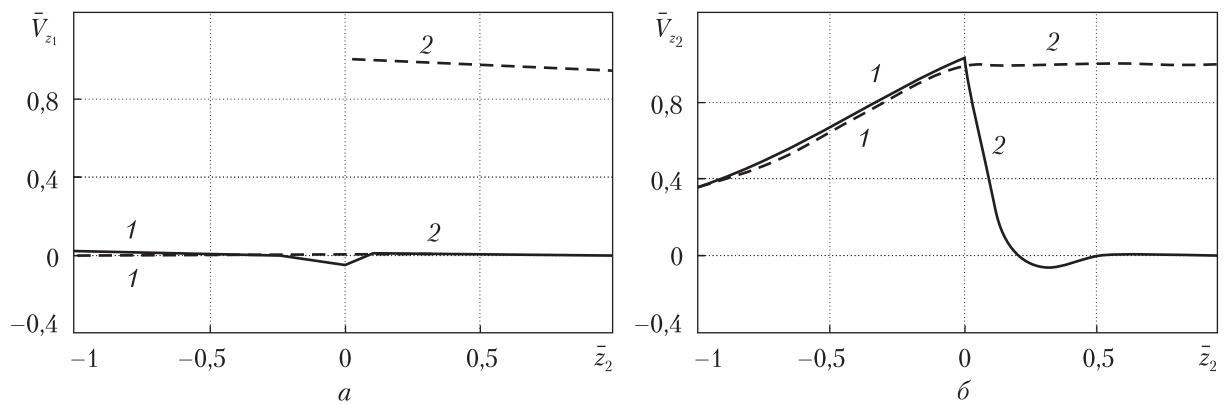


Рис. 4

материал), взаимодействующем со слоем воды, изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933557$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,769121$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Отметим, что, как известно [15], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы: оргстекло (менее жесткий материал) – вода такие, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,152595$ ) больше скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933557$ ). Как следует из графиков рис. 2, в данной гидроупругой системе при таких параметрах в коротковолновой части спектра мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого полупространства.

Графики, приведенные на рис. 1, б, показывают, что с увеличением толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  влияние вязкой жидкости проявляется сильнее. При этом возрастает абсолютное значение коэффициента затухания  $\bar{\gamma}$  и уменьшается величина фазовой скорости квазиповерхностной волны (волны типа Стоунли). Это обусловлено тем, что движения в этой волне, распространяющейся вдоль границы контакта сред, локализуются в приконтактных областях как жидкости, так и упругого полупространства, где влияние вязкости значительнее.

Из графиков, представленных на рис. 2, следует, что в случае вязкой жидкости (сплошные линии) глубина проникновения квазиверхностной волны в упругое тело ( $\bar{z}_2 \leq 0$ ) больше, чем в жидкость ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$ ).

На рис. 3, *a* приведены дисперсионные кривые для системы упругое полупространство из стали (более жесткий материал) – слой воды. Как видно из графиков, фазовая скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923007$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,461819$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Скорости мод высокого порядка при частотах зарождения равны скорости волны сдвига в упругом полупространстве  $\bar{c}_s$ . Далее с увеличением толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  их величины стремятся к скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ). При этом движения в модах высокого порядка при  $\bar{h} \rightarrow \infty$  смещаются от поверхностей слоя жидкости в его толщу. С этим связано уменьшение степени влияния вязкой жидкости на фазовые скорости этих волн в высокочастотной части спектра (рис. 3, *b*).

Из графиков, приведенных на рис. 4, следует, что при  $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923007$  в гидроупругой системе со слоем идеальной жидкости (штриховые линии) в коротковолновой части спектра мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется, главным образом, в приконтактной области жидкого слоя. Как видно из графиков (рис. 4, *a*), в упругом теле ( $\bar{z}_2 \leq 0$ ) продольные смещения  $\bar{V}_{z_1}$  ничтожно малы по всей толщине упругого тела и даже на границе контакта сред, а поперечные смещения  $\bar{V}_{z_2}$  убывают с глубиной. В жидкости ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$ ) наоборот как продольные, так и поперечные смещения больше соответствующих смещений в упругом теле. В случае вязкого жидкого слоя (сплошные линии) уменьшается глубина проникновения моды 1 в жидкость (рис. 4, *b*). При этом глубина проникновения ее в упругое тело практически не изменяется.

Таким образом, анализ показывает, что в упруго-жидкостной системе со слоем идеальной жидкости (штриховые линии) и упругого полупространства из менее жесткого материала (см. рис. 2) в высокочастотной части спектра поверхность волна частично проникает как в жидкость, так и в упругое полупространство. При этом приконтактные области упругого полупространства и слоя жидкости формируют волновод, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн. В гидроупругой системе с упругим полупространством из более жесткого материала (см. рис. 3 и 4) и слоем идеальной жидкости как низшая поверхность мода (штриховые линии на рис. 4), так и моды высокого порядка проникают в жидкий слой и распространяются преимущественно в нем. При этом жидкий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

В случае вязкой жидкости связь между упругим полупространством и жидким слоем усиливается. Как видно из приведенных на рис. 2 и 4 графиков, это приводит к уменьшению глубины проникновения низшей поверхности моды (сплошные линии) в жидкость. Вследствие этого в гидроупругом волноводе с менее жестким упругим полупространством вклад вязкой жидкости в общий поток энергии становится незначительным.

Полученные результаты позволяют устанавливать для волновых процессов пределы применимости модели идеальной жидкости.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
2. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютекин В.В. Расчет характеристик нормальных волн мелкого моря с упругим дном (импедансный метод). *Акуст. журн.* 1987. **33**, № 5. С. 805–813.
3. Безруков А.В. Некоторые особенности распространения нормальных волн в мелком море с неоднородным упругим дном. *Акуст. журн.* 1989. **35**, № 4. С. 744–747.
4. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства. *Акуст. журн.* 2014. **60**, № 5. С. 492–504.
5. Кузнецов С.В. Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор). *Акуст. журн.* 2014. **60**, № 1. С. 90–100.
6. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.* 1997. **33**, № 6. P. 435–463.
7. Guz A.N. Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1. *Int. Appl. Mech.* 2000. **36**, № 1. P. 14–39.
8. Guz A.N. The dynamics of a compressible viscous liquid (review). II. *Int. Appl. Mech.* 2000. **36**, № 3. P. 281–302.
9. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428 p.
10. Guz A.N., Zhuk A. P., Bagno A. M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. P. 449–507.
11. Guz A. N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. P. 175–190.
12. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах. Киев: Наук. думка, 1986.
13. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
14. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
15. Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела. *Акуст. журн.* 1988. **34**, № 4. С. 608–615.

Поступило в редакцию 12.04.2017

## REFERENCES

1. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Bezrukov, A. V., Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. (1987). Calculation of normal wave characteristics in the case of shallow sea with an elastic bottom (the impedance method). *Acoustic J.*, 33, No. 5, pp. 805-813 (in Russian).
3. Bezrukov, A. V. (1989). Some propagation features of normal waves in a shallow sea with inhomogeneous elastic bottom. *Acoustic J.*, 35, No. 4, pp. 744-747 (in Russian).
4. Belyankova, T. I. & Kalinchuk, V. V. (2014). On the problem of analyzing the dynamic properties of a layered half-space. *Acoustic J.*, 60, No. 5, pp. 492-504 (in Russian).
5. Kuznetsov, S. V. (2014). Lamb waves in anisotropic plates (review). *Acoustic J.*, 60, No. 1, pp. 90-100 (in Russian).
6. Bagno, A. M. & Guz, A. N. (1997). Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.*, 33, No. 6, pp. 435-463. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02700652>
7. Guz, A. N. (2000). Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1. *Int. Appl. Mech.*, 36, No 1, pp. 14-39. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02681958>
8. Guz, A. N. (2000). The dynamics of a compressible viscous liquid (review). II. *Int. Appl. Mech.*, 36, No. 3, pp. 281-302. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02681914>
9. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
10. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bagno, A. M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 5, pp. 449-507. doi: <https://doi.org/10.1007/S10778-016-0770-6>
11. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No. 3, pp. 175-190. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00885084>
12. Guz, A. N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. 2 vols. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).

13. Guz, A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kyiv: A.S.K. (in Russian).
14. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kyiv: A.S.K. (in Russian).
15. Volkenstein, M. M. & Levin, V. M. (1988). Structure of Stoneley wave on the boundary of a viscous liquid and a solid. Acoustic J., 34, No. 4, pp. 608-615 (in Russian).

Received 12.04.2017

О.М. Гузь, О.М. Багно

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

### ПРО АКУСТИЧНІ ХВИЛІ У ШАРІ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ, ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ

Розглянуто задачу про поширення акустичних хвиль у шарі в'язкої стисливої рідини, що взаємодіє з пружним півпростором. Дослідження проведено на основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, що засновані на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружних тіл і рідини. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення гармонічних хвиль у гідропружній системі. Побудовано дисперсійні криві для нормальних хвиль в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив товщини шару в'язкої стисливої рідини на фазові швидкості та коефіцієнти загасання акустичних хвиль. Показано, що вплив в'язкості рідини на параметри хвильового процесу пов'язаний з властивостями локалізації хвиль. Розроблений підхід і отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделі ідеальної стисливої рідини. Чисельні результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

**Ключові слова:** акустичні хвилі, фазова швидкість, коефіцієнт згасання, пружний півпростір, шар в'язкої стисливої рідини.

A.N. Guz, A.M. Bahno

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

### ON THE ACOUSTIC WAVES IN A LAYER OF A VISCOUS FLUID INTERACTING WITH THE ELASTIC HALF-SPACE

The problem of acoustic wave propagation in a layer of a viscous compressible fluid that interacts with the elastic half-space is considered. The study is conducted on the basis of the three-dimensional linear equations of the classical elasticity theory for a solid body and on the basis of the three-dimensional linearized Navier–Stokes equations for a viscous compressible fluid. The problem formulation and the approach based on the utilization of the representations of general solutions of the linearized equations for elastic solids and liquids are applied. A dispersion equation, which describes the propagation of harmonic waves in a hydroelastic system, is obtained. The dispersion curves for normal waves over a wide range of frequencies are constructed. The influence of the thickness of the layer of a viscous compressible fluid on the phase velocities and the attenuation coefficients of acoustic waves is analyzed. It is shown that the influence of the viscosity of a fluid on the wave process parameters is associated with the localization properties of waves. The approach developed and the results obtained make it possible to establish limits for the wave processes, within which the model of an ideal compressible fluid can be applied. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Keywords:** acoustic waves, phase velocity, attenuation coefficient, elastic half-space, layer of a viscous compressible fluid.