

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.08.012>

УДК 517.988

О.Ф. Кашпур¹, В.В. Хлобистов²

¹ Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

² Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: olena.kashpur@gmail.com

Інтерполяційний поліном Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком

Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим

У лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком і в скінченновимірному евклідовому просторі досліджено точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня.

Ключові слова: лінійний простір, евклідовий простір, формула Лагранжа, точність на поліномах.

В [1] наведені інтерполяційні операторні поліноми в гільбертовому просторі. Один із цих інтерполянтів розглянуто в статті. Показано, що він являє собою інтерполяційну формулу Лагранжа з фундаментальними функціональними поліномами в лінійному просторі зі скалярним добутком. Цю інтерполяційну формулу Лагранжа досліджено для випадку скінченновимірного евклідового простору, визначено умови “збереження” полінома відповідного степеня.

Інтерполяційний операторний поліном в [1] n -го степеня для оператора f має вигляд

$$P_n(x) = \left\langle \bar{f}, \Gamma_m^{-1} \sum_{p=0}^n (x_i, x)^p \Big|_{i=1}^m \right\rangle, \quad (1)$$

де x_i — вузли інтерполяції; $P_n(x_i) = f(x_i) = f_i$, $i = \overline{1, m}$; $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$; $x_i, x \in H$, H — гільбертовий простір; $f: H \rightarrow Y$, Y — лінійний простір, $f_i \in Y$; $\Gamma_m = \left\| \sum_{p=0}^n (x_i, x_j)^p \right\|$, а x_i обираємо такими, щоб матриця Γ_m була невиродженою, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^m f_i \alpha_i$, $\alpha_i \in R_1$.

Далі формулу (1) перепишемо в іншому вигляді та зведемо її до формули Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком.

© О.Ф. Кашпур, В.В. Хлобистов, 2018

Нехай X, Y – лінійні простори, X – зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) , $f : X \rightarrow Y$, $P_n(x)$ – інтерполяційний операторний поліном степеня n для f з вузлами x_1, x_2, \dots, x_m , $P_n(x_i) = f(x_i) = f_i$, $x, x_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, а вузли x_i обрані таким чином, щоб матриця $\|P_{ni}(x_j)\|$ була невідродженою, де

$$P_{ni}(x) = \sum_{k=0}^n L_{ki} x^k, \quad L_{ki} x^k = (x_i, x)^k, \quad L_{0i} = 1, \quad P_{ni} : X \rightarrow R_1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Невідродженість матриці для скінченновимірного евклідового простору розглянуто в [2] за рахунок вибору незалежних векторів, пов'язаних з вузлами. Введемо позначення: $\overline{P}_n(x) = (P_{n1}(x), P_{n2}(x), \dots, P_{nm}(x))$, а $P_{ni}^{-1}(x_j)$ – елементи матриці $\|\overline{P}_n(x_j)\|^{-1}$. Відповідно до [1] маємо

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \left\langle \overline{f}, \|\overline{P}_n(x_j)\|^{-1} \overline{P}_n(x) \right\rangle = \left\langle \overline{f}, \|\overline{P}_n^{-1}(x_j)\| \overline{P}_n(x) \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^m f_i \sum_{j=1}^m P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x) = \sum_{i=1}^m f_i l_i(x), \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \sum_{j=1}^m P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x), \\ l_i(x_k) &= \sum_{j=1}^m P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x_k) = \delta_{ik}, \end{aligned} \quad (3)$$

δ_{ik} – символ Кронекера.

Враховуючи (2), (3), отримуємо

$$P_n(x_k) = \sum_{i=1}^m f_i l_i(x_k) = f_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, m}.$$

Таким чином, формула (2) являє собою формулу Лагранжа для інтерполяційного полінома в лінійному просторі зі скалярним добутком:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^m f_i l_i(x), \quad l_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, m}, \quad (4)$$

де $l_i(x)$ – фундаментальні функціональні поліноми Лагранжа степеня n , $l_i : X \rightarrow R_1$.

Зауважимо, що інтерполянт (4) з вузлами x_i , $i = \overline{1, m}$, не єдиний в X . Дійсно, якщо $p_n : X \rightarrow Y$ – довільний операторний поліном n -го степеня [6], то формула

$$P_n(x) = p_n(x) + \sum_{i=1}^m (f_i - p_n(x_i)) l_i(x) \quad (5)$$

визначає множину інтерполяційних операторних поліномів n -го степеня для оператора f ,

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= p_n(x_k) + \sum_{i=1}^m (f_i - p_n(x_i)) l_i(x_k) = \\ &= p_n(x_k) + \sum_{i=1}^m (f_i - p_n(x_i)) \delta_{ik} = f_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

В [1] доведено, що інтерполянт вигляду (4), який належить множині (5), має мінімальну норму, породжену скалярним добутком за гаусовою мірою [3].

Відзначимо, що вираз

$$p_n(x) - \sum_{i=1}^m p_n(x_i) l_i(x)$$

не перетворюється в нуль-елемент нескінченновимірного лінійного простору Y [6], тобто формула Лагранжа не “зберігає” операторний поліном відповідного степеня, а числа m та n при побудові полінома (2) не пов’язані між собою.

Розглянемо частинний випадок, коли X є скінченновимірним евклідовим простором на прикладі простору E_2 , $f: E_2 \rightarrow R_1$, $u \in E_2$, $u = (x, y)$, $u_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, m}$, де u_i обираємо

таким чином, щоб матриця $\left\| \sum_{p=0}^n (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|$ мала обернену [2]. З (2) одержимо

$$P_n(x, y) = \left(\bar{f}, \left\| \sum_{p=0}^n (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^n (x x_i + y y_i)^p \Big|_{i=1}^m \right) = \sum_{i=1}^m f_i l_i(x, y). \quad (6)$$

Тоді

$$l_i(x, y) \Big|_{i=1}^m = \left\| \sum_{p=0}^n (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^n (x x_i + y y_i)^p \Big|_{i=1}^m,$$

$$l_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, m}.$$

Враховуючи (6), маємо

$$P_n(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^m f_i l_i(x_k, y_k) = f_k = f(x_k, y_k), \quad k = \overline{1, m},$$

і формула (6) є інтерполяційною формулою Лагранжа для $f: E_2 \rightarrow R_1$, де $l_i(x, y)$ – фундаментальні поліноми Лагранжа двох змінних степеня n . Також на підставі [1] $P_n(x, y)$ є інтерполянтом мінімальної норми [3] на множині інтерполянтів n -го степеня двох змінних.

Надалі будемо вважати, що число m задано (фіксовано), а степінь n інтерполяційного полінома обираємо з нерівності $m \leq \min p = \bar{p}$, де p – розмірність простору поліномів степеня n в E_2 , $p = (n+1)(n+2)/2$ [4].

Приклад 1. Нехай $m = 2$, $u_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, $u_1 = (0, 1)$, $u_2 = (1, 0)$. Тоді

$$m = 2 \leq \min(n+1)(n+2)/2 = \bar{p} = 3, \quad n = 1,$$

$$\left\| \sum_{p=0}^1 (u_i, u_j)^p \right\|^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\left\| \sum_{p=0}^1 (u_i, u_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^1 (u_i, u)^p \Big|_{i=1}^2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1-x+2y \\ 1+2x-y \end{vmatrix},$$

$$l_1(x, y) = \frac{1}{3}(1-x+2y), \quad l_2(x, y) = \frac{1}{3}(1+2x-y),$$

$$l_i(u_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad P_1(x, y) = \sum_{i=1}^2 f_i l_i(x, y).$$

Нехай $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$. Тоді $f_1 = f(0, 1) = 4$, $f_2 = f(1, 0) = 3$,

$$P_1(x, y) = 4 \cdot \frac{1}{3}(1-x+2y) + 3 \cdot \frac{1}{3}(1+2x-y) = \frac{1}{3}(7+2x+5y) \neq 1+2x+3y,$$

тобто у випадку $m = 2$, $\bar{p} = 3$, $n = 1$ інтерполянт $P_1(x, y)$ не “зберігає” поліном 1-го степеня.

Приклад 2. Нехай $m = 3$, $u_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, $u_1 = (0, 1)$, $u_2 = (1, 0)$, $u_3 = (0, -1)$. Тоді

$$m = 3 \leq \min(n+1)(n+2)/2 = \bar{p} = 3, \quad n = 1.$$

Маємо

$$\left\| \sum_{p=0}^2 (u_i, u_j)^p \right\|^{-1} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\left\| \sum_{p=0}^2 (u_i, u_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^2 (u_i, u)^p \Big|_{i=1}^3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1-x+y \\ 2x \\ 1-x-y \end{vmatrix},$$

$$P_3(u) = \sum_{i=1}^3 f_i l_i(u),$$

$$l_1(x, y) = \frac{1}{2}(1-x+y), \quad l_2(x, y) = x, \quad l_3(x, y) = \frac{1}{2}(1-x-y),$$

$$l_i(u_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Нехай $f(u) = 1 + 2x + 3y$, тоді $f_1 = f(0, 1) = 4$, $f_2 = f(1, 0) = 3$, $f_3 = f(0, -1) = -2$. Одержимо

$$P_1(x, y) = 4 \cdot \frac{1}{2}(1-x+y) + 3x - 2 \cdot \frac{1}{2}(1-x-y) = 1+2x+3y,$$

тобто у випадку $m = 3$, $\bar{p} = 3$, $n = 1$ інтерполянт Лагранжа (6) “зберігає” поліном 1-го степеня двох змінних.

Таким чином, для скінченновимірною евклідового простору E_2 приходимо до такого висновку: у випадку $m < \bar{p}$ маємо єдиний інтерполянт Лагранжа мінімальної норми, при цьому він не “зберігає” поліном відповідного степеня (приклад 1). Цей інтерполянт в [2] названо недовизначеним. Якщо $m = \bar{p}$, то інтерполяційний поліном Лагранжа єдиний та “зберігає” поліном відповідного степеня [5] (приклад 2).

Аналогічні міркування та перетворення можна провести для евклідового простору E_k , $u \in E_k$, $u = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, де кількість вузлів m задано (фіксовано), а степінь інтерполянта n визначаємо з умови

$$m \leq \min p = \bar{p}, \quad p = (n+k)!/n!k!, \quad k \geq 2, \quad (7)$$

де p – розмірність простору поліномів n -го степеня в E_k [5]. Самі вузли u_1, u_2, \dots, u_m обираємо таким чином, щоб існувала обернена матриця в (2), а степінь інтерполяційного полінома визначаємо з нерівності (7).

Сформулюємо такий висновок для простору E_k . Має місце

Теорема 1. Нехай $f: E_k \rightarrow R_1$, $k \geq 2$, m задано. Тоді якщо $m = \bar{p}$, то інтерполянт Лагранжа $P_n(u)$ буде точним на всіх поліномах степеня не вище n , а якщо $m < \bar{p}$, то інтерполянт мінімальної норми $P_n(u)$ не має такої властивості.

Зауваження. В разі зменшення розмірності евклідового простору зменшується “недовизначеність” інтерполянта Лагранжа мінімальної норми, а у випадку $f: R_1 \rightarrow R_1$ маємо $m = \bar{p} = n+1$, тобто одержуємо класичний поліном Лагранжа n -го степеня з $n+1$ вузлами для функції однієї змінної.

Стосовно лінійного простору X зі скалярним добутком має місце таке твердження. Якщо вузли інтерполяції обрані так, що відповідна матриця невироджена, то завжди існує єдиний інтерполяційний поліном Лагранжа мінімальної норми [3], але цей інтерполянт не “зберігає” операторний поліном відповідного степеня. При цьому відзначимо, що при побудові інтерполяційного операторного полінома Лагранжа числа m (кількість вузлів) та n (ступінь інтерполянта) не пов’язані між собою [1].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. Киев: Наук. думка, 2000. 407с.
2. Кашпур О.Ф., Хлобистов В.В. До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2016. № 10. С. 10–14. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.010>
3. Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск: Наука и техника, 1985. 310 с.
4. Березин И.С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Москва: Физматгиз. 1962. Т. 1. 632 с.
5. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. 848 с.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980. 495 с.

Надійшло до редакції 17.05.2018

REFERENCES

1. Makarov, V. L., Khlobystov, V. V. & Yanovich, L. A. (2000). Interpolation of operators. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
2. Kashpur, O. F. & Khlobystov, V. V. (2016). To some questions of a polynomial interpolation in Euclidean spaces. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 10, pp. 10-14 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi.2016.10.010>
3. Yegorov, A. D., Sobolevsky, P. I. & Yanovich, L. A. (1985). Approximate methods for computation of continual integrals. Minsk: Nauka i Tehnika (in Russian).
4. Berezin, I. S. & Zhidkov, N. P. (1962). *Methods of computations*. Vol. 1. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
5. Babenko, K. I. (2002). *Foundations of numerical analysis*. Moscow, Izhevsk: RC "Regular and chaotic dynamics" (in Russian).
6. Trenogin, V. A. (1980). *Functional analysis*. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 17.05.2018

*Е.Ф. Каштур*¹, *В.В. Хлобыстов*²

¹ Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

² Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: olena.kashpur@gmail.com

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ ЛАГРАНЖА
В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

В линейном бесконечномерном пространстве со скалярным произведением и в конечномерном евклидовом пространстве исследована точность формулы Лагранжа на полиномах соответствующей степени.

Ключевые слова: *линейное пространство, евклидово пространство, формула Лагранжа, точность на полиномах.*

*O.F. Kashpur*¹, *V.V. Khlobystov*²

¹ Taras Shevchenko National University of Kiev

² Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: olena.kashpur@gmail.com

LAGRANGE INTERPOLATION POLYNOMIAL
IN A LINEAR SPACE WITH INNER PRODUCT

In a linear infinite-dimensional space with inner product and in a finite-dimensional Euclidean space, the accuracy of the Lagrange formula on polynomials of the corresponding degree is investigated.

Keywords: *linear space, Euclidean space, Lagrange formula, accuracy on polynomials.*