



# ОПОВІДІ

---

## НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

---

9 • 2018

НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНИЙ ЖУРНАЛ • ЗАСНОВАНИЙ У 1939 Р. • ВИХОДИТЬ ІДІМІСЯЦЯ • КІЇВ

REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE

## Зміст

### МАТЕМАТИКА

*Мартынюк А.А.* О принципе сравнения и оценках функций Ляпунова для нелинейных систем ..... 3

### ІНФОРМАТИКА

*Зуб С.С.* Математические модели динамики симметричного волчка во внешних аксиально симметричных полях ..... 12

*Ustimenko V.A.* On multivariate public keys based on a pair of transformations with density gap ..... 21

### МЕХАНІКА

*Булат А.Ф., Круковський О.П., Круковська В.В., Безрученко К.А.* Чисельне моделювання геомеханічних і фільтраційних процесів, що відбуваються в породному масиві при відпрацюванні газових родовищ ..... 28

*Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О.* Модель зони зчеплення з нерівномірним законом зчеплення—відриву для системи декількох колінеарних тріщин ..... 35

*Семенюк М.П., Трач В.М., Жукова Н.Б.* До континуальної розрахункової моделі стійкості нанотрубок з напівсферичними кришками ..... 42

*Хорошун Л.П., Левчук О.И.* Эффективные упругие свойства стохастических односторонних волокнистых композитов при несовершенной адгезии ..... 51

## Contents

### MATHEMATICS

*Martynuk A.A.* On the principle of comparison and estimates of the Lyapunov functions for nonlinear systems ..... 3

### INFORMATICS

*Zub S.S.* Mathematical models of a symmetric top dynamics in the external fields with axial symmetry ..... 12

*Ustimenko V.A.* On multivariate public keys based on a pair of transformations with density gap ..... 21

### MECHANICS

*Bulat A.F., Kruckovskiy A.P., Kruckovska V.V., Bezruchko K.A.* Numerical simulation of geomechanical and filtration processes in a rock massif during the gas field development ..... 28

*Selivanov M.F., Chornoivan Yu.O.* The cohesive zone model with a non-uniform traction-separation law for a system of several collinear cracks ..... 35

*Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B.* To a continual calculation model of stability of nanotubes with hemispherical end caps ..... 42

*Khoroshun L.P., Levchuk O.I.* Effective elastic properties of stochastic unidirectional fibrous composites under imperfect adhesion ..... 51

**ФІЗИКА**

- Лаванов Г.Ю. Двойной метамагнитный фазовый переход в изинговском антиферромагнетике с легкоплоскостной одноионной анизотропией и со спином ионов  $S = 1$  ..... 64

**НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ**

- Кушнір А.М., Бурахович Т.К., Ільєнко В.А., Джоашвілі В.Б. Електромагнітні дослідження вздовж профілю Несено-Іржавець-Абрамівка (південний борт Дніпровсько-Донецької западини) ..... 70

- Лялько В.І., Єлістратова Л.О., Апостолов О.А., Ходоровський А.Я. Оцінка стану та змін загального соціально-економічного розвитку України за період 1992–2012 роки на основі матеріалів зйомок космічного апарату DMSP/OLS (США) про нічну освітленість території ..... 77

**ХІМІЯ**

- Нікітенко В.Н., Кублановський В.С. Массоперенос при електрохіміческому восстановлении палладия(II) из глицинатного електролита... 87

**БІОЛОГІЯ**

- Веденичева Н.П., Аль-Маали Г.А., Бисько Н.А., Щербатюк Н.Н., Косаковская И.В. Особенности роста и содержание эндогенных цитокининов в мицелиальной биомассе базидиевых грибов *Hericium coralloides* и *Fomitopsis officinalis* в культуре *in vitro*. ..... 97

**ЕКОЛОГІЯ**

- Зарубіна Н.Е. Изменение содержания  $^{137}\text{Cs}$  в различных объектах лесных экосистем зоны отчуждения Чернобыльской АЭС в течение календарного года ..... 105

**PHYSICS**

- Lavanov G.Yu. The double metamagnetic phase transition in an Ising antiferromagnet with light-plane single-ion anisotropy and with ion spin  $S = 1$  ..... 64

**GEOSCIENCES**

- Kushnir A.N., Burakhovich T.K., Ilyenko V.A., Dzhaoishvili V.B. Electromagnetic studies along the Neseno-Irzhavets—Abramivka profile (Southern slope of the Dnieper-Donets trough) ..... 70

- Lyalko V.I., Elistratova L.A., Apostolov A.A., Khodorovsky A.Ya. The condition and changes assessment of general socio-economic development of Ukraine between 1992 and 2012 on the basis of spacecraft survey materials DMSP/OLS (USA) about the night lightening of the territory ..... 77

**CHEMISTRY**

- Nikitenko V.N., Kublanovsky V.S. Mass transfer in the electrochemical reduction of palladium(II) from a glycinate electrolyte. ..... 87

**BIOLOGY**

- Vedenicheva N.P., Al-Maali G.A., Bisko N.A., Shcherbatiuk M.M., Kosakivska I.V. Peculiarities of the growth and the content of endogenous cytokinins in the mycelial biomass of basidial mushrooms *Hericium coralloides* and *Fomitopsis officinalis* growing *in vitro*. ..... 97

**ECOLOGY**

- Zarubina N.Ye. Changing the contents of  $^{137}\text{Cs}$  in various objects of the forest ecosystems of the ChNPP exclusion zone during the calendar year 105

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.003>

УДК 531.36

**А.А. Мартынюк, академик НАН Украины**

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: center@inmech.kiev.ua

## **О принципе сравнения и оценках функций Ляпунова для нелинейных систем**

*Приводятся некоторые новые оценки функции Ляпунова для нелинейной системы и устанавливаются условия устойчивости по Ляпунову и на конечном интервале. Приведенные условия основаны на оценках нормы решений нелинейной системы уравнений возмущенного движения.*

**Ключевые слова:** нелинейная система общего вида, функция Ляпунова, оценка нормы решений, устойчивость движения.

Фактическое применение прямого метода Ляпунова предусматривает два этапа: первый – построение подходящей функции Ляпунова и второй – оценка полной производной функции в силу уравнений возмущенного движения. В результате на основе общих теорем Ляпунова и/или их обобщений получается результат качественного анализа свойств движения.

Недавняя статья К. Кордуняну [1], посвященная уточнению вклада Р. Конти [2, 3] в создание принципа сравнения в качественной теории уравнений, явилась стимулом к написанию этой работы. Здесь обсуждаются неравенства для функций Ляпунова, предшествовавшие результатам Р. Конти, и приведены новые оценки функций Ляпунова вдоль решений нелинейной системы общего вида. Эти оценки могут оказаться более конструктивным инструментом анализа динамики нелинейных систем по сравнению с общими утверждениями принципа сравнения.

**1. Предварительный анализ.** Рассматривается нелинейная система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1)$$

при начальных условиях

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $f(t, 0) = 0$  при всех  $t \geq t_0$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ . Предполагается, что если  $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ , то решение  $x(t, t_0, x_0)$  задачи (1), (2) существует при всех  $t \geq t_0$ .

**Определение 1.** Функция  $V \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ ,  $V(t, 0) = 0$  при всех  $t \geq t_0$  называется функцией Ляпунова, если она однозначная, определено положительная и убывающая при всех  $t \geq t_0$ , в некоторой окрестности начала координат фазового пространства и вместе с полной производной  $V'$  в силу системы (1) разрешает вопрос об устойчивости (неустойчивости) состояния  $x = 0$  системы (1).

Напомним, что  $V$ -функции и их полные производные в силу исследуемой системы уравнений возмущенного движения были введены в работе Ляпунова [4], а именно:

при доказательстве теоремы об устойчивости (см. [4] с. 62) функция  $V$  знакопредetermined,  $V'$  в силу уравнений (1) знакопостоянная противоположного знака с  $V$ , т. е. предполагалось, что  $V' \geq W$ , где  $W$  — некоторая независящая от  $t$  положительная функция, и

$$V' \leq 0, \quad (3)$$

где  $V' = V_t(t, x) + (f, \operatorname{grad} V(t, x))$ ;

при доказательстве теоремы о неустойчивости (см. [4] с. 68) рассматривается соотношение

$$V' = \lambda V + W, \quad (4)$$

где  $\lambda > 0$ , а  $W$  — или тождественно равна нулю или некоторая знакопостоянная функция;

при рассмотрении критических случаев для автономных и периодических систем дифференциальных уравнений, когда вид функций и их производные  $V'$  значительно усложняются.

В работе [5] для функции  $V$  рассматриваются оценки полной производной в виде

$$V' \leq f(V), \quad (5)$$

где  $f(V) > 0$  при  $0 < V \leq H$ ,  $f(0) = 0$ , а также

$$V' \leq \varphi(t)f(V), \quad (6)$$

где  $\varphi(t)$  такова, что  $\int_{t_0}^t \varphi(s)ds \leq M$ ,  $M > 0$  — const, и

$$V' \leq g_1(t)V + g_2(t)V^{1+k}, \quad k > 0, \quad (7)$$

где функции  $g_1(t), g_2(t)$  непрерывные и положительные при всех  $t \geq t_0$ .

Фактически оценки (1) — (7) явились предпосылкой появления уравнений сравнения вида

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad u(t_0) = u_0 \geq 0; \quad (8)$$

$$\frac{du}{dt} = \lambda u + w, \quad u(t_0) = u_0 \geq 0, \quad (9)$$

где  $w \geq 0$ ;

$$\frac{du}{dt} = g(u), \quad u(t_0) = u_0 \geq 0; \quad (10)$$

$$\frac{du}{dt} = \phi(t)g(u), \quad u(t_0) = u_0 \geq 0; \quad (11)$$

$$\frac{du}{dt} = g_1(t)u + g_2(t)u^{1+k}, \quad u(t_0) = u_0 \geq 0. \quad (12)$$

Предложение Конти [2, 3] рассматривать оценку для  $V'$  в виде

$$V' \leq \omega(t, V), \quad (13)$$

где  $\omega$  – вещественная функция, определенная на  $\mathbb{R}_+ \times D$ ,  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ , было заключительным шагом к получению оценки

$$V(t, x(t)) \leq r(t, t_0, r_0), \quad (14)$$

где  $r(t, \cdot)$  – максимальное решение уравнения сравнения

$$\frac{dr}{dt} = \omega(t, r(t)), \quad r(t_0) = r_0 \geq 0, \quad (15)$$

при всех  $t \in [t_0, T]$ , где  $T > t_0$  – правый конец существования решения исходной системы (1) и уравнения сравнения (15).

**Определение 2.** Кортеж, состоящий из системы (1), функции  $V(t, x)$ , ее полной производной  $V'(t, x)$ , мажорирующей функции  $\omega(t, V)$  и уравнения сравнения (15) составляет основу принципа сравнения в качественной теории уравнений, если он позволяет получить оценку вида (14) для всех  $t \in [t_0, T]$  при условии  $V(t_0, x_0) \leq r_0$ .

В обзорной статье [6] представлены основные результаты, полученные при развитии принципа сравнения на основе скалярной, векторной и матричнозначной функций Ляпунова и указаны некоторые применения этого подхода в задачах механики.

Общность оценки функции  $V(t, x(t))$  в виде (14), при отсутствии решения в общем случае уравнения сравнения (15), стимулирует поиск новых оценок функции  $V(t, x)$  путем использования интегральных неравенств.

Приведем один из возможных подходов в этом направлении.

**2. Оценка функции Ляпунова на основе неравенства (6).** Наряду с оценкой (6) будем рассматривать уравнения сравнения

$$\frac{dr}{dt} = \varphi(t)g(r), \quad r(t_0) = r_0 \geq 0 \quad (16)$$

и

$$\frac{dq}{dt} = -\varphi(t)g(q), \quad q(t_0) = r_0 \geq 0. \quad (17)$$

Следуя [7], введем обозначение  $J(r) = \int_0^r du/g(u)$ . Ф. Брауэр показал [8], что решением уравнения сравнения (16) является функция

$$r(t) = J^{-1} \left( J(r_0) + \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right). \quad (18)$$

Это решение существует для всех  $t$ , для которых  $(J(r_0) + \int_{t_0}^t \varphi(s) ds) < R$ , где  $R = \int_0^\infty du/g(u)$ . А именно: если  $r(t_0) = r_0$ , то  $t \in [0, T]$ , где  $T$  определяется из соотношения  $\int_{t_0}^T \varphi(s) ds = \int_{r_0}^\infty du/g(u)$ .

Если  $\int_{r_0}^\infty du/g(u) = \infty$ , то  $T = \infty$ . Если  $\int_{t_0}^\infty \varphi(s) ds < \int_{r_0}^\infty du/g(u) \leq \infty$ , то  $J(r_0) + \int_{t_0}^t \varphi(s) ds < R$  и, следовательно,  $r(t) < \infty$ , т. е. решение  $r(t)$  ограничено при всех  $0 \leq t < \infty$ .

Аналогично для уравнения (17) получено решение уравнения сравнения в виде

$$q(t) = J^{-1} \left( J(r_0) - \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right), \quad (19)$$

которое определено при всех  $t > t_0$ , для которых  $J(r_0) - \int_{t_0}^t \varphi(s) ds > 0$ .

Следовательно, решение  $q(t)$  существует для всех  $t \in [t_0, \tau]$ , где  $\tau$  определяется из соотношения  $\int_{t_0}^\tau \varphi(s) ds = \int_0^{r_0} du/g(u)$ . Если  $\int_{t_0}^t \varphi(s) ds \leq \int_0^{r_0} du/g(u)$ , то  $q(t)$  существует при всех  $t_0 \leq t < \infty$ , и если  $\int_{t_0}^\infty \varphi(s) ds < \int_0^{r_0} du/g(u)$ , то  $q(t) > 0$  при всех  $t_0 \leq t < \infty$ .

Отсюда получаем такие утверждения.

**Теорема 1** (ср. [8, 9]). *Если условие (6) выполняется при  $0 < V \leq H$ ,  $f(0) = 0$  и  $f(V) > 0$ , то для функции  $V(t, x(t))$  верна оценка*

$$V(t, x(t)) \leq J^{-1} \left( J(r_0) + \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right) \quad (20)$$

при  $V(t_0, x_0) \leq r_0$  для всех  $t \in [t_0, T]$ , где  $T$  определяется из соотношения

$$\int_{t_0}^T \varphi(s) ds = \int_0^\infty du/g(u). \quad (21)$$

**Теорема 2** (ср. [11, 12]). *Если условие (6) выполняется при  $0 < V \leq H$ ,  $f(0) = 0$  и  $f(V) > 0$ , то для функции  $V(t, x(t))$  верна оценка*

$$V(t, x(t)) \geq J^{-1} \left( J(r_0) - \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right)$$

при  $V(t_0, x_0) \geq r_0$  и при всех  $t \geq t_0$ , для которых  $\int_{t_0}^t \varphi(s) ds \leq \int_0^\infty du/g(u)$ .

**Теорема 3** (ср. [10]). Если условие  $V' \leq \varphi(t)f(V)$  выполняется, то  $V(t, x(t))$  с начальным условием  $V(t_0, x_0) \leq r_0$  существует на интервале  $[0, T]$ , где  $\int_0^T \varphi(s) ds = \int_{r_0}^\infty du/f(u)$ . Если  $\int_0^\infty \varphi(s) ds \leq \int_{r_0}^\infty du/f(u)$ , то  $V(t, x(t))$  определенная при всех  $t : 0 \leq t < \infty$ , и если  $\int_0^\infty \varphi(s) ds < \int_{r_0}^\infty du/f(u)$ , то  $V(t, x(t))$  ограничена на интервале  $[0, \infty)$ .

**Теорема 4** (ср. [11]). Если условие  $V' \leq \varphi(t)f(V)$  выполняется и  $\int_{r_0}^\infty du/g(u) = \infty$ , то функция  $V(t, x(t))$  определена при всех  $0 \leq t < \infty$ . Если к тому же  $\int_{t_0}^t \varphi(s) ds < \infty$ , то функция  $V(t, x(t))$  на решениях системы (1) ограничена на интервале  $[t_0, \infty)$ .

**3. Оценка функции Ляпунова на основе неравенства (7).** Пусть для системы (1) построена функция  $V(t, x)$ , для которой

$$V'(t, x) \leq g_1(t)V(t, x) + g_2(t)V^\alpha(t, x) \quad (22)$$

при всех  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  и  $\alpha > 1$ . Для этой оценки имеет место следующее утверждение.

**Теорема 5.** Предположим, что для системы (1) построена функция Ляпунова  $V(t, x)$ , полная производная которой в силу системы (1) оценивается неравенством (22) и, кроме того,

$$M(t, t_0) = 1(\alpha - 1)V^{\alpha-1}(t_0, x_0) \int_{t_0}^t g_2(s) \exp\left[(\alpha - 1) \int_{t_0}^s g(\tau) d\tau\right] ds > 0 \quad (23)$$

при всех  $t \in [t_0, T]$ . Тогда для функции  $V(t, x(t))$  верна оценка

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) \exp\left(\int_{t_0}^t g_1(s) ds\right) (M(t, t_0))^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (24)$$

для всех  $t \in [t_0, T]$ .

**Доказательство** этой теоремы приведено в работе [7]. При этом применяется техника оценок, аналогичная развитой при оценке норм решений нелинейных систем (см. [13] и библиографию там).

Теорема 5 имеет ряд следствий.

**Следствие 1.** Пусть в неравенстве (22)  $g_2(t) \equiv 0$  при всех  $t \geq t_0$ . Тогда из оценки (24) следует, что

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) \exp\left[\int_{t_0}^t g_1(s) ds\right]$$

при всех  $t \geq t_0$ .

**Следствие 2.** Пусть в неравенстве (22)  $g_1(t) \equiv 0$  при всех  $t \geq t_0$  и

$$M_1(t, t_0) = 1 - (\alpha - 1) \int_{t_0}^t g_2(s) ds > 0$$

при всех  $t \in [t_0, T]$ . Тогда

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) (M_1(t, t_0))^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

при всех  $t \in [t_0, T]$ .

**4. Условия устойчивости по Ляпунову.** Оценка функции Ляпунова (24) при некоторых дополнительных условиях позволяет указать достаточные условия различных типов устойчивости системы (1). Обозначим

$$W(t, t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^t g_1(s) ds \right) (M(t, t_0))^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

при всех  $t \geq t_0$ . Принимая во внимание определения устойчивости по Ляпунову, приведенные в [14], сформулируем достаточные условия устойчивости состояния  $x = 0$  системы (1) в виде следующей теоремы.

**Теорема 6.** Предположим, что для системы (1) выполняются условия теоремы 5 и для функции  $V(t, x)$  имеет место неравенство

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2$$

при всех  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ , где  $0 < c_1 < c_2$ . Тогда имеют место следующие утверждения:

( $S_1$ ). Если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  существует положительная непрерывная по  $t_0$  функция  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$  такая, что при  $\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$

$$W(t, t_0) \leq \frac{\varepsilon}{\delta(t_0, \varepsilon)} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{1/2}$$

при всех  $t \geq t_0$ , то  $\|x(t)\| < \varepsilon$  при всех  $t \geq t_0$ , т. е. состояние  $x = 0$  системы (1) эквивалентно устойчиво.

( $S_2$ ). Если в утверждении ( $S_1$ ) функция  $\delta = \delta(\varepsilon)$  не зависит от  $t_0$ , то состояние  $x = 0$  системы (1) равномерно устойчиво, т. е.  $\|x(t)\| < \varepsilon$  при всех  $t \geq t_0$ , равномерно по  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ .

( $S_3$ ). Если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  существуют положительные числа  $\delta_0 = \delta(t_0)$  и  $T = T(t_0, \varepsilon)$  такие, что при  $\|x_0\| < \delta_0(t_0)$

$$W(t, t_0 + T) \leq \frac{\varepsilon}{\delta_0(t_0)} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{1/2}$$

при всех  $t \geq t_0 + T$ , то состояние  $x = 0$  системы (1) квазиэквиасимптотически устойчиво, т. е.  $\|x(t)\| < \varepsilon$  при всех  $t \geq t_0 + T$ .

$(S_4)$ . Если в утверждении  $(S_3)$  числа  $\delta_0$  и  $T$  не зависят от  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , то состояние  $x = 0$  системы (1) квазиравномерно асимптотически устойчиво, т. е.  $\|x(t)\| < \varepsilon$  при всех  $t \geq t_0 + T$ , равномерно по  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ .

$(S_5)$ . Если условия утверждений  $(S_1)$  и  $(S_3)$  выполняются одновременно, то состояние  $x = 0$  системы (1) эквиасимптотически устойчиво.

$(S_6)$ . Если условия утверждений  $(S_2)$  и  $(S_4)$  выполняются одновременно, то состояние  $x = 0$  системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, т. е.  $\|x(t)\| < \varepsilon$  при всех  $t \geq t_0$  и  $\lim \|x(t)\| = 0$ , при  $t \rightarrow \infty$ .

$(S_7)$ . Если для любых  $\varepsilon > 0, \beta > 0, t_0 \in \mathbb{R}_+$  существует положительное число  $T^* = T^*(t_0, \varepsilon, \beta)$  такое, что при  $\|x_0\| < \beta$  выполняется неравенство

$$W(t, t_0 + T^*) \leq \frac{\varepsilon}{\beta} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{1/2}$$

при всех  $t \geq t_0 + T^*$ , то состояние  $x = 0$  системы (1) квазиеэквиасимптотически устойчиво в целом, т. е.  $\|x(t)\| < \varepsilon$  при всех  $t \geq t_0 + T^*$ .

$(S_8)$ . Если условия утверждения  $(S_7)$  выполняются с числом  $T^*$ , не зависящим от  $t_0$ , то состояние  $x = 0$  системы (1) квазиравномерно асимптотически устойчиво (в целом).

$(S_9)$ . Если условия утверждений  $(S_1)$  и  $(S_7)$  выполняются при любом  $\beta$ ,  $0 \leq \beta < +\infty$ , то состояние  $x = 0$  системы (1) полностью устойчиво.

$(S_{10})$ . Если выполняются условия утверждений  $(S_2)$  и при малых  $\beta$ ,  $0 \leq \beta < +\infty$ , выполняются условия утверждения  $(S_8)$ , то состояние  $x = 0$  системы (1) полностью равномерно по  $t_0$  устойчиво.

Доказательства утверждений  $(S_1) - (S_{10})$  следуют непосредственно из оценки (5) и соответствующих определений устойчивости.

**5. Условия устойчивости на конечном интервале.** Напомним определение устойчивости на конечном интервале системы (1), принимая во внимание результаты монографии [15].

**Определение 3.** Состояние  $x = 0$  системы (1) называется устойчивым на конечном интервале при заданном значении  $t_0$  по отношению к положительно определенной функции  $V(t, x)$ , если из условия  $V(t_0, x_0) \leq c_0$  следует выполнение неравенства  $V(t, x(t)) < c(t)$  для значений  $t \in [t_0, t_0 + T]$  при любых  $0 < c_0 < c(t)$ , где  $c(t)$  – непрерывная ограниченная функция при всех  $t \in [t_0, t_0 + T]$ .

**Замечание 1.** В отличие от определения В.И. Зубова [15] в определении 3 область  $V(t, x) < c(t)$  является изменяющейся во времени, что адекватно динамическому анализу неавтономной системы (1).

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 7.** Пусть для системы (1) построена функция  $V(t, x)$ , полная производная которой удовлетворяет неравенству (22) при  $0 \leq V(t, x) \leq H$ ,  $H = \text{const} > 0$  и выполняются все условия теоремы 5. Тогда любое решение системы (1) с начальными условиями из области  $V(t_0, x_0) \leq c_0$  не выйдет из области  $V(t, x) < c(t)$  на конечном интервале, если

$$W(t, t_0) < \frac{c(t)}{c_0}$$

при любом  $t \in [t_0, t_0 + T]$ .

Доказательство теоремы 7 следует непосредственно из оценки (24).

**6. Заключительные замечания.** К настоящему времени принцип сравнения разработан для многих классов уравнений в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Полученные результаты подтверждены во многих работах (см., например, [6] и библиографию там). В то же время отсутствие общего метода анализа динамических свойств решений уравнений и/или систем сравнения стимулирует получение новых оценок изменения функций Ляпунова для определенных классов систем уравнений. Приведенная оценка и ее следствия являются примером такого поиска и имеют некоторый потенциал для приложений.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Corduneanu C. The contribution of R. Conti to the comparison method in differential equations. *Libertas Math.* 2009. **29**. P. 113–115.
2. Conti R. Limitazione in ampiezza delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie e applicazioni. *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 3.* 1956. **11**, № 3. P. 344–349.
3. Conti R. Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 3.* 1956. **11**, № 4. P. 510–514.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1935. 386 с.
5. Мельников Г.И. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова. *Докл. АН СССР.* 1956. **110**, № 3. С. 326–329.
6. Martynyuk A.A. Asymptotic stability criterion for nonlinear monotonic systems and its applications (review). *Int. Appl. Mech.* 2011. **47**, Iss. 5. P. 475–534; Martynyuk A.A. Критерий асимптотической устойчивости нелинейных монотонных систем и его применение. *Современные проблемы механики. Т. 1.* Киев: ЛІТЕРА ЛТД, 2015. С. 276–339.
7. Martynyuk A.A. Конструктивные оценки  $V$ -функции Ляпунова для уравнений возмущенного движения. *Прикл. механика.* 2017. **53 (63)**, вып. 5. С. 122–128.
8. Bihari I. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. *Acta Math. Hung.* 1956. **7**. P. 81–94.
9. Brauer F. Bounds for solution of ordinary differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1963. **14**, № 1. P. 36–43.
10. Cooke K.L. A non-local existence theorem for systems of ordinary differential equations. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* 1955. **4**. P. 301–308.
11. Wintner A. An Abelian lemma of asymptotic equilibria. *Amer. J. Math.* 1946. **78**. P. 451–454.
12. Langenhop C.E. Bounds on the norm of a solution of a general differential equation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1960. **11**. P. 795–799.
13. Martynyuk A.A. Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations. *Appl. Math.* 2015. **6**. P. 182–194.
14. Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A. Practical stability of nonlinear systems. Singapore: World Scientific, 1990. 207 p.
15. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Ленинград: Судпромгиз, 1959. 327 с.

Поступило в редакцию 14.09.2017

#### REFERENCES

1. Corduneanu, C. (2009). The contribution of R. Conti to the comparison method in differential equations. *Libertas Math.*, 29, pp. 113-115.
2. Conti, R. (1956). Limitazione “in ampiezza” delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie e applicazioni. *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 3*, 11, No. 3, pp. 344-349.
3. Conti, R. (1956). Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 3*, 11, No. 4, pp. 510-514.

4. Lyapunov, A. M. (1935). The general problem of the stability of motion. Leningrad, Moscow: ONTI (in Russian).
5. Melnikov, G. I. (1956). Some questions of the direct Lyapunov method. Dokl. AN. SSSR, 110, No. 3, pp. 326-329 (in Russian).
6. Martynyuk, A. A. (2011). Asymptotic stability criterion for nonlinear monotonic systems and its applications (review). Int. Appl. Mech., 47, Iss. 5, pp. 475-534; Martynyuk, A.A. (2015). A criterion for the asymptotic stability of non-linear monotonic si- and its application. In Modern problems of mechanics, Vol. 1 (pp. 276-339). Kiev: LITERA LTD (in Russian).
7. Martynyuk, A. A. (2017). Constructive estimates of Lyapunov V-functions for the equations of perturbed motion. Prikl. Mekhanika, 53 (63), Iss. 5, pp. 122-128 (in Russian).
8. Bihari, I. (1956). A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. Acta Math. Hung., 7, pp. 81-94.
9. Brauer, F. (1963). Bounds for solution of ordinary differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 14, No. 1, pp. 36-43.
10. Cooke, K. L. (1955). A non-local existence theorem for systems of ordinary differential equations. Rend. Circ. Mat. Palermo, 4, pp. 301-308.
11. Wintner, A. (1946). An Abelian lemma of asymptotic equilibria. Amer. J. Math., 78, pp. 451-454.
12. Langenhop, C. E. (1960). Bounds on the norm of a solution of a general differential equation. Proc. Amer. Math. Soc., 11, pp. 795-799.
13. Martynyuk, A. A. (2015). Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations. Appl. Math., 6, pp. 182-194.
14. Lakshmikantham, V., Leela, S. & Martynyuk, A. A. (1990). Practical stability of nonlinear systems. Singapore: World Scientific.
15. Zubov, V. I. (1959). Mathematical methods for the automatic regulation systems analysis. Leningrad: Sudpromgiz (in Russian).

Received 14.09.2017

*A.A. Martynyuk*

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: center@inmech.kiev.ua

### **ПРО ПРИНЦИП ПОРІВНЯННЯ І ОЦІНКИ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ**

Наводяться деякі нові оцінки функції Ляпунова для нелінійної системи і встановлюються умови стійкості за Ляпуновим і на кінцевому інтервалі. Наведені умови базуються на оцінках норм розв'язків нелінійної системи рівнянь збуреного руху.

**Ключові слова:** *нелінійна система загального вигляду, функція Ляпунова, оцінка норми розв'язків, стійкість руху.*

*A.A. Martynyuk*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: center@inmech.kiev.ua

### **ON THE PRINCIPLE OF COMPARISON AND ESTIMATES OF THE LYAPUNOV FUNCTIONS FOR NONLINEAR SYSTEMS**

Some new estimates of the Lyapunov function for a nonlinear system and conditions of Lyapunov stability and stability on a finite interval are established. The above conditions are based on estimates of the norms of solutions of a nonlinear system of equations of perturbed motion.

**Keywords:** *nonlinear system of a general form, Lyapunov function, estimate of the norm of solutions, stability of motion.*

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.012>

УДК 517.58/.5892

**С.С. Зуб**

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

E-mail: stah@univ.kiev.ua

## **Математические модели динамики симметричного волчка во внешних аксиально симметричных полях**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С.И. Ляшко*

*Описан новый подход к исследованию динамической устойчивости магнитных тел в аксиально симметричном магнитном поле. Рассмотрен гамильтониан, описывающий широкий класс моделей с симметричным волчком, взаимодействующим с внешними аксиально симметричными полями. Найдены необходимые и достаточные условия динамического равновесия для нового класса моделей с симметричным волчком. Получены уравнения движения в форме удобной для численного моделирования.*

**Ключевые слова:** динамические системы, математические модели, симметричный волчок, устойчивость, уравнения движения.

В работе обобщаются все предыдущие подходы к исследованию динамической устойчивости магнитных тел в аксиально симметричном магнитном поле с учетом силы тяжести. Предлагается гамильтониан, описывающий широкий класс моделей с симметричным волчком, взаимодействующим с внешними аксиально симметричными полями. Рассматривается устойчивость относительных равновесий. Исследование проводится с использованием инерциальной системы отсчета. Устойчивость исследуется с помощью теоремы Ратью—Ортега. Эквивалентность алгоритмов этой теоремы и классического метода энергии-момента обоснована в работе [1].

Найдены необходимые и достаточные условия динамического равновесия.

Впервые в общем виде выведены законченные аналитические формулы для достаточных условий. Это сделано благодаря новому, более простому, условию трансверсальности и методу исключения изолированных квадратов.

Имеем скобки Пуассона

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \{v_i, v_k\} = 0, \{\pi_i, v_j\} = \epsilon_{ijl} v_l, \{\pi_i, \pi_j\} = \epsilon_{ijl} \pi_l.$$

$$h((\vec{x}, \vec{v}), (\vec{p}, \vec{\pi})) = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + \frac{1}{2I_\perp} \vec{\pi}^2 + V(\vec{x}, \vec{v}).$$

Применяя  $\dot{f} = \{f, h\}$  к базовым динамическим переменным (д. п.), получаем

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \frac{1}{M} \vec{p}; \\ \dot{\vec{p}} = -\nabla^x V(\vec{x}, \vec{v}); \\ \dot{\vec{v}} = \frac{1}{I_{\perp}} \vec{\pi} \times \vec{v}; \\ \dot{\vec{\pi}} = \nabla^v V(\vec{x}, \vec{v}) \times \vec{v}. \end{cases}$$

Так как кинетическая энергия  $SO(3)$  — симметрична, то условие аксиальной симметрии гамильтониана системы сводится к требованию аксиальной симметрии потенциальной энергии:

$$\{V, j_3\} = x^1 \frac{\partial V}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial V}{\partial x^1} + v^1 \frac{\partial V}{\partial v^2} - v^2 \frac{\partial V}{\partial v^1} = 0,$$

которое также можно записать в виде

$$\vec{x}_{\perp} \times (\nabla^x V)_{\perp} + \vec{v}_{\perp} \times (\nabla^v V)_{\perp} = 0. \quad (1)$$

Как будет показано ниже, соотношение (1) тождественно выполняется на орбите относительного равновесия, поэтому не вносит ничего нового в исследование устойчивости.

Интегралы движения и форма присоединенного гамильтониана остаются такими же, как и в задаче об Орбитроне, а именно

$$h^{\xi} = h - \omega J_3 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$

где

$$\begin{cases} C_1(\vec{v}, \vec{\pi}) = \vec{v}^2; \\ C_2(\vec{v}, \vec{\pi}) = \vec{v} \cdot \vec{\pi}; \\ J_3((\vec{x}, \vec{v}), (\vec{p}, \vec{\pi})) = \pi_3 + x_1 p_2 - x_2 p_1. \end{cases}$$

Из

$$\begin{aligned} dh^{\xi} = & \left( \frac{1}{M} \vec{p} - \omega \vec{e}_3 \times \vec{x} \right) \cdot d\vec{p} + \left( \frac{1}{I_{\perp}} \vec{\pi} - \omega \vec{e}_3 + \lambda_2 \vec{v} \right) \cdot d\vec{\pi} + \\ & + (\nabla^x V + \omega \vec{e}_3 \times \vec{p}) \cdot d\vec{x} + (\nabla^v V + 2\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{\pi}) \cdot d\vec{v} \end{aligned}$$

получаем необходимые условия относительного равновесия

$$\begin{cases} \vec{p} = M \omega (\vec{e}_3 \times \vec{x}); \\ \nabla^x V + \omega \vec{e}_3 \times \vec{p} = 0; \\ \vec{\pi} = I_{\perp} \omega \vec{e}_3 - \lambda_2 I_{\perp} \vec{v}; \\ \nabla^v V + 2\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{\pi} = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \nabla^x V = M\omega^2 \vec{x}_\perp; \\ \lambda_2 = \omega v_3 - \frac{1}{I_\perp} C_2; \\ \nabla^v V + \lambda \vec{v} + I_\perp \omega \lambda_2 \vec{e}_3 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\lambda = 2\lambda_1 - \lambda_2^2 I_\perp.$$

Отсюда следует

$$\begin{cases} \nabla^x V = M\omega^2 \vec{x}_\perp; \\ (\nabla^v V)_\perp = -\lambda \vec{v}_\perp; \\ \omega C_2 = \omega \langle \vec{v}, \vec{\pi} \rangle = \frac{\partial V}{\partial v_z} + (\lambda + I_\perp \omega^2) v_z. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь символ  $\vec{u}_\perp$  означает составляющую вектора  $\vec{u}$ , ортогональную оси симметрии системы  $z$ .

*Замечание 1.* Вектор  $\vec{v}$  и множитель Лагранжа  $\omega$  находятся из первых двух строк (2) или, что то же самое, из первой строки (3). Это отличается от Орбитрона, где было постулировано, что  $\vec{v}$  направлен вдоль оси  $z$ .

*Замечание 2.* Соотношения (4) не только определяют  $\vec{v}$  и множители Лагранжа  $\omega$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , но и, скорее всего, накладывают ограничения на функцию  $V$  дополнительно к ее аксиальной симметрии. Опорная точка и допустимые вариации

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = r_0 \vec{e}_1; \\ \vec{p}_0 = M\omega r_0 \vec{e}_2; \\ \vec{v}_0 = \vec{v}_0, \vec{v}_0^2 = 1; \\ \vec{\pi}_0 = C_2 \vec{v}_0 + I_\perp \omega P_\perp^{v_0}(\vec{e}_3). \end{cases} \quad (5)$$

Как уже отмечалось, вектор  $\vec{v}_0$  должен быть найден из необходимых условий устойчивости. Допустимые вариации  $v = (\delta x, \delta p, \delta v, \delta \pi)$  в опорной точке удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \delta_v C_1 = 2v_{0i} \delta v_i = 0; \\ \delta_v C_2 = \pi_{0i} \delta v_i + v_{0i} \delta \pi_i = 0; \\ \delta_v J_3 = \delta \pi_3 + p_0 \delta x_1 + r_0 \delta p_2 = 0. \end{cases}$$

К этим условиям добавляем условие трансверсальности, которое в отличие от задачи об Орбитроне берем в более простом виде, упрощающем дальнейшие вычисления. Таким образом, полный набор условий может быть записан в следующем виде:

$$\begin{cases} \delta v_3 = -\frac{1}{v_{0z}} \langle \vec{v}_{0\perp}, \delta \vec{v} \rangle; \\ \delta \pi_3 = -\frac{1}{v_{0z}} \left\langle \vec{v}_{0\perp}, \left( \delta \bar{\pi} - \frac{I_\perp \omega}{v_{0z}} \delta \vec{v} \right) \right\rangle; \\ \delta p_2 = -\frac{p_0}{r_0} \delta x_1 - \frac{1}{r_0} \delta \pi_3; \\ \delta x_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

*Замечание 3.* То, что для касательного к орбите вектора не может выполняться  $\dot{x}_{02} = 0$ , следует из второй строки (5), если  $r_0 \neq 0$  и  $\omega \neq 0$ , что всегда предполагается.

Анализ связей на вариации удобно выполнить в системе координат, приспособленной к вектору  $\vec{v}_{0\perp}$ .

*Замечание 4.* Если этот вектор (как в случае Орбитрона) равен 0, то новая система координат на плоскости совпадает с исходной декартовой.

Рассмотрим систему координат на плоскости, связанную с выделенным вектором  $\vec{a}$ . Пусть на плоскости задана система координат  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  и вектор  $\vec{a}$ . Направим базисный вектор  $\vec{E}_1$  новой системы координат  $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$  по вектору  $\vec{a}$ . Для того чтобы новая система координат была правильно ( $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2 = \vec{e}_3$ ) ориентирована, должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{a^1}{|\vec{a}|} \vec{e}_1 + \frac{a^2}{|\vec{a}|} \vec{e}_2 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}; \\ \vec{E}_2 = -\frac{a^2}{|\vec{a}|} \vec{e}_1 + \frac{a^1}{|\vec{a}|} \vec{e}_2. \end{cases}$$

Введем матрицу

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{a^1}{|\vec{a}|} & -\frac{a^2}{|\vec{a}|} \\ \frac{a^2}{|\vec{a}|} & \frac{a^1}{|\vec{a}|} \end{bmatrix}, \quad \vec{E}_i = \alpha_{ki} \vec{e}_k, \quad \alpha_{ki} = \langle \vec{e}_k, \vec{E}_i \rangle.$$

Тогда

$$\alpha_{ki} X_i = \langle \vec{e}_k, X_i \vec{E}_i \rangle = \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle = x_k,$$

то есть

$$x_k = \alpha_{ki} X_i, \quad \mathbf{x} = \alpha \mathbf{X},$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{|\vec{a}|} X_1 - \frac{a_2}{|\vec{a}|} X_2; \\ x_2 = \frac{a_2}{|\vec{a}|} X_1 + \frac{a_1}{|\vec{a}|} X_2. \end{cases}$$

Соответственно,

$$X_k = (\alpha^{-1})_{ki} x_i, \quad \mathbf{X} = \alpha^{-1} \vec{x},$$

где

$$\alpha^{-1} = \alpha^T = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 \\ \frac{a^1}{|\vec{a}|} & \frac{a^2}{|\vec{a}|} \\ -\frac{a^2}{|\vec{a}|} & \frac{a^1}{|\vec{a}|} \end{bmatrix}.$$

В нашем случае выделенный вектор на плоскости — это  $\vec{v}_{0\perp}$ , поэтому

$$\alpha = \frac{1}{|\vec{v}_{0\perp}|} \begin{bmatrix} v_{01} & -v_{02} \\ v_{02} & v_{01} \end{bmatrix}, \quad \vec{E}_A = \alpha_{BA} \vec{e}_B, \quad \alpha_{BA} = \langle \vec{e}_B, \vec{E}_A \rangle,$$

$$\alpha_{AB} = \frac{v_{01}}{|\vec{v}_{0\perp}|} \delta_{AB} - \frac{v_{02}}{|\vec{v}_{0\perp}|} \epsilon_{AB},$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_{0\perp}|} (v_{01} \vec{e}_1 + v_{02} \vec{e}_2) = \frac{\vec{v}_{0\perp}}{|\vec{v}_{0\perp}|}; \\ \vec{E}_2 = \frac{1}{|\vec{v}_{0\perp}|} (-v_{02} \vec{e}_1 + v_{01} \vec{e}_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_{0\perp}|} \delta_{AB} v_{0A} \vec{e}_B; \\ \vec{E}_2 = \frac{1}{|\vec{v}_{0\perp}|} \epsilon_{AB} v_{0A} \vec{e}_B. \end{cases}$$

Будем использовать исходную систему координат для вариаций  $\delta x$ ,  $\delta p$  и базис  $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{e}_3\}$  для вариаций  $\delta v$ ,  $\delta \pi$ , обозначим эти вариации в новой системе большими буквами  $\delta N$ ,  $\delta \Pi$ . Тогда связи (6) будут иметь вид

$$\begin{cases} \delta v_3 = -\frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{v_{0z}} \delta N_1; \\ \delta \pi_3 = -\frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{v_{0z}} \left( \delta \Pi_1 - \frac{1}{v_{0z}} I_\perp \omega \delta N_1 \right); \\ \delta p_2 = -M \omega \delta x_1 + \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{r_0 v_{0z}} \left( \delta \Pi_1 - \frac{1}{v_{0z}} I_\perp \omega \delta N_1 \right); \\ \delta x_2 = 0. \end{cases}$$

Введем переменную  $\delta \Pi'_1$ :

$$\begin{cases} \delta\Pi'_1 = \delta\Pi_1 - \frac{1}{v_{0z}} I_{\perp} \omega \delta N_1; \\ \delta\Pi_1 = \delta\Pi'_1 + \frac{1}{v_{0z}} I_{\perp} \omega \delta N_1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \delta v_3 = -\frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{v_{0z}} \delta N_1; \\ \delta\pi_3 = -\frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{v_{0z}} \delta\Pi'_1; \\ \delta p_2 = -M\omega\delta x_1 + \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{r_0 v_{0z}} \delta\Pi'_1; \\ \delta x_2 = 0. \end{cases}$$

Вторая вариация присоединенного гамильтониана имеет вид (индексы  $i, j, k = 1 \dots 3, A, B, C = 1 \dots 2$ )

$$\begin{aligned} \delta_v^2 h^\lambda &= \frac{1}{M} \delta p_3^2 + \frac{1}{M} \delta p_1^2 + \frac{1}{M} \delta p_2^2 + \frac{1}{I_{\perp}} \delta\bar{\pi}_1^2 + \frac{1}{I_{\perp}} \delta\pi_3^2 + \\ &+ 2\lambda_2 \langle \delta\bar{\pi}_1, \delta\vec{v}_{\perp} \rangle + 2\lambda_2 \delta\pi_3 \delta v_3 + 2\lambda_1 \delta\vec{v}_{\perp}^2 + 2\lambda_1 \delta v_3^2 - \\ &- 2\omega(\delta x_1 \delta p_2 - \delta x_2 \delta p_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i \delta x^j + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial v^A} \delta x^i \delta v^A + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial v^3} \delta x^i \delta v^3 + \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial v^A \partial v^B} \delta v^A \delta v^B + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^A \partial v^3} \delta v^A \delta v^3 + \frac{\partial^2 V}{\partial v_3^2} \delta v_3^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя связи, получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \delta p_2^2 = M\omega^2 \delta x_1^2 - 2\omega \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{r_0 v_{0z}} \delta x_1 \delta\Pi'_1 + \frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{Mr_0^2 v_{0z}^2} \delta\Pi'_1^2; \\ \frac{1}{I_{\perp}} \delta\bar{\pi}^2 = \frac{1}{I_{\perp}} \frac{1}{v_{0z}^2} \delta\Pi'_1^2 + 2 \frac{1}{v_{0z}} \omega \delta\Pi'_1 \delta N_1 + \frac{1}{v_{0z}^2} I_{\perp} \omega^2 \delta N_1^2 + \frac{1}{I_{\perp}} \delta\Pi_2^2; \\ \langle \delta\bar{\pi}, \delta\vec{v} \rangle = \frac{1}{v_{0z}^2} \delta\Pi'_1 \delta N_1 + \delta\Pi_2 \delta N_2 + \frac{1}{v_{0z}} I_{\perp} \omega \delta N_1^2; \\ \delta\vec{v}^2 = \frac{1}{v_{0z}^2} \delta N_1^2 + \delta N_2^2; \\ -2\omega(\delta x_1 \delta p_2 - \delta x_2 \delta p_1) = 2M\omega^2 \delta x_1^2 - 2\omega \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{r_0 v_{0z}} \delta x_1 \delta\Pi'_1. \end{cases} \quad (8)$$

Далее используются следующие обозначения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial N_A} = d^2 V(\vec{e}_i, \vec{E}_A); \\ \frac{\partial^2 V}{\partial N_A \partial N_B} = d^2 V(\vec{E}_A, \vec{E}_B); \\ \frac{\partial^2 V}{\partial N_A \partial v_3} = \partial_{\vec{E}_A} \left( \frac{\partial V}{\partial v_3} \right), \end{cases}$$

причем в выражениях этого типа всегда считается, что векторы  $\vec{e}_i$  касательны к пространству переменных  $\vec{x}$ , а  $\vec{E}_A$  — к пространству переменных  $\vec{v}$ . Подставляя (8) в (7), находим приведенную квадратичную форму  $Q = Q(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\begin{aligned} \delta_v^2 h^\lambda &= \frac{1}{M} \delta p_3^2 + \frac{1}{M} \delta p_1^2 + M \omega^2 \delta x_1^2 - 2\omega \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{r_0 v_{0z}} \delta x_1 \delta \Pi'_1 + \frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{M r_0^2 v_{0z}^2} \delta \Pi'_1^2 + \frac{1}{I_\perp} \frac{1}{v_{0z}^2} \delta \Pi'_1^2 + \\ &+ 2 \frac{1}{v_{0z}} \omega \delta \Pi'_1 \delta N_1 + \frac{1}{v_{0z}^2} I_\perp \omega^2 \delta N_1^2 + \frac{1}{I_\perp} \delta \Pi_2^2 + 2\lambda_2 \left( \frac{1}{v_{0z}^2} \delta \Pi'_1 \delta N_1 + \delta \Pi_2 \delta N_2 + \frac{1}{v_{0z}} I_\perp \omega \delta N_1^2 \right) + \\ &+ 2\lambda_1 \left( \frac{1}{v_{0z}^2} \delta N_1^2 + \delta N_2^2 \right) + 2M \omega^2 \delta x_1^2 - 2\omega \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{r_0 v_{0z}} \delta x_1 \delta \Pi'_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \delta x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} \delta x_1 \delta x_3 + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \delta x_3^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial N_A} \delta x^1 \delta N_A + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^3 \partial N_A} \delta x^3 \delta N_A - 2 \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{v_{0z}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial v^3} \delta x^1 \delta N_1 - \\ &- 2 \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{v_{0z}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^3 \partial v^3} \delta x^3 \delta N_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial N_1^2} \delta N_1^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial N_2} \delta N_1 \delta N_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial N_2^2} \delta N_2^2 - \\ &- 2 \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{v_{0z}} \frac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial v^3} \delta N_1^2 - 2 \frac{|\vec{v}_{0\perp}|}{v_{0z}} \frac{\partial^2 V}{\partial N_2 \partial v^3} \delta N_1 \delta N_2 + \frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{v_{0z}^2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_3^2} \delta N_1^2. \end{aligned}$$

Для вывода условий положительной определенности квадратичной формы  $Q$  используем метод последовательного исключения изолированных квадратов, аналогичный процедуре Гильберта—Шмидта ортогонализации базиса. Представим

$$Q(x_1, \dots, x_n) = Ax_1^2 + 2B(x_2, \dots, x_n)x_1 + Q'(x_2, \dots, x_n),$$

где  $B$  — линейная функция своих переменных, а  $Q'$  — квадратичная функция своих переменных, уже независящие от  $x_1$ .

Для положительной определенности  $Q$  необходимо, чтобы  $A > 0$ , тогда положительная определенность  $Q$  эквивалентна положительной определенности следующей ниже квадратичной формы  $Q_1$  от меньшего числа переменных:

$$Q_1(x_2, \dots, x_n) = -\frac{1}{A} B^2(x_2, \dots, x_n) + Q'(x_2, \dots, x_n).$$

Последовательно применяя эту процедуру, можно найти все условия положительной определенности исходной квадратичной формы, т. е. все очередные  $A > 0$ .

*Замечание 5.* Порядок исключения переменных является произвольным.

Применяя метод последовательного исключения изолированных квадратов в следующем порядке:  $\delta p_3, \delta p_1, \delta \Pi_2, \delta \Pi'_1, \delta N_2, \delta N_1$ , получаем

$$\begin{cases} \lambda + d^2V(\vec{E}_2, \vec{E}_2) > 0; \\ \lambda + d^2V(\vec{v}_0^T, \vec{v}_0^T) + \frac{I_{\perp}^2 \vec{v}_{0\perp}^2}{I_{\perp} \vec{v}_{0\perp}^2 + M r_0^2} (v_{0z} \omega + \lambda_2)^2 + \vec{v}_{0\perp}^2 I_{\perp} \omega^2 - \frac{d^2V(\vec{E}_2, \vec{v}_0^T)^2}{\lambda + d^2V(\vec{E}_2, \vec{E}_2)} > 0; \\ A > 0, \quad C > 0, \quad AC - B^2 > 0, \end{cases}$$

где  $A, B, C$  — громоздкие аналитические выражения. Используются следующие обозначения. Введем вектор  $\vec{v}_0^T = v_{0z} \vec{E}_1 - |\vec{v}_{0\perp}| \vec{e}_3$ ,  $\langle \vec{v}_0, \vec{v}_0^T \rangle = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} d^2V(\vec{E}_2, \vec{v}_0^T) = v_{0z} \frac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial N_2} - |\vec{v}_{0\perp}| \frac{\partial^2 V}{\partial N_2 \partial v^3}; \\ d^2V(\vec{e}_1, \vec{v}_0^T) = v_{0z} \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial N_1} - |\vec{v}_{0\perp}| \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial v^3}; \\ d^2V(\vec{e}_3, \vec{v}_0^T) = v_{0z} \frac{\partial^2 V}{\partial x^3 \partial N_1} - |\vec{v}_{0\perp}| \frac{\partial^2 V}{\partial x^3 \partial v^3}; \\ d^2V(\vec{v}_0^T, \vec{v}_0^T) = v_{0z}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial N_1^2} - 2|\vec{v}_{0\perp}| v_{0z} \frac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial v^3} + \vec{v}_{0\perp}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v_3^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial N_1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial v_1} \frac{v_{01}}{|\vec{v}_{0\perp}|} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial v_2} \frac{v_{02}}{|\vec{v}_{0\perp}|}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial N_2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial v_1} \frac{v_{02}}{|\vec{v}_{0\perp}|} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial v_2} \frac{v_{01}}{|\vec{v}_{0\perp}|}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial v^3} = \frac{\partial^2 V}{\partial v_1 \partial v_3} \frac{v_{01}}{|\vec{v}_{0\perp}|} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_2 \partial v_3} \frac{v_{02}}{|\vec{v}_{0\perp}|}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial N_2 \partial v^3} = -\frac{\partial^2 V}{\partial v_1 \partial v_3} \frac{v_{02}}{|\vec{v}_{0\perp}|} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_2 \partial v_3} \frac{v_{01}}{|\vec{v}_{0\perp}|}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial N_1^2} = \frac{1}{|\vec{v}_{0\perp}|^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2} v_{01}^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial v_1 \partial v_2} v_{01} v_{02} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} v_{02}^2 \right); \\ \frac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial N_2} = \frac{1}{|\vec{v}_{0\perp}|^2} \left( -\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2} v_{01} v_{02} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} v_{01} v_{02} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_1 \partial v_2} (v_{01}^2 - v_{02}^2) \right); \\ \frac{\partial^2 V}{\partial N_2^2} = \frac{1}{|\vec{v}_{0\perp}|^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} v_{02}^2 - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial v_1 \partial v_2} v_{01} v_{02} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2} v_{01}^2 \right). \end{cases}$$

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Zub S.I., Zub S.S., Lyashko V.S., Lyashko N.I., Lyashko S.I. Mathematical model of interaction of a symmetric top with an axially symmetric external field. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**, Iss. 3. P. 333–345.

Поступило в редакцию 29.05.2018

## REFERENCES

1. Zub, S. I., Zub, S. S., Lyashko, V. S., Lyashko, N. I. & Lyashko, S. I. (2017). Mathematical model of interaction of a symmetric top with an axially symmetric external field. *Cybernetics and Systems Analysis*, 53, Iss. 3, pp. 333-345.

Received 29.05.2018

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
E-mail: stah@univ.kiev.ua

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ СИМЕТРИЧНОЇ ДЗИГИ В ЗОВНІШНІХ АКСІАЛЬНО СИМЕТРИЧНИХ ПОЛЯХ

Описано новий підхід щодо дослідження динамічної стійкості магнітних тіл в аксіально симетричному магнітному полі. Розглянуто гамільтоніан, що описує широкий клас моделей із симетричною дзигою, яка взаємодіє із зовнішніми аксіально симетричними полями. Знайдено необхідні та достатні умови динамічної рівноваги для нового класу моделей із симетричною дзигою. Отримано рівняння руху у формі, зручній для чисельного моделювання.

**Ключові слова:** динамічні системи, математичні моделі, симетрична дзига, стійкість, рівняння руху.

Taras Shevchenko National University of Kiev  
E-mail: stah@univ.kiev.ua

## MATHEMATICAL MODELS OF A SYMMETRIC TOP DYNAMICS IN THE EXTERNAL FIELDS WITH AXIAL SYMMETRY

The article describes a new approach to the investigation of the dynamic stability of magnetic bodies in an axially symmetric magnetic field. We consider a Hamiltonian for a broad class of models with a symmetric top that interacts with external axially symmetric fields. Necessary and sufficient conditions of the dynamic equilibrium for a new class of models with a symmetric top are found. Motion equations in the form that is convenient for the numerical simulation are obtained.

**Keywords:** dynamical systems, mathematical models, symmetric top, stability, motion equations.

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.021>

UDC 519.1, 514.128

## V.A. Ustimenko

Institute of Telecommunication and Global Information Space of the NAS of Ukraine, Kiev

Maria Curie-Sklodowska University, Lublin, Poland

E-mail: vasylustimenko@yahoo.pl

# On multivariate public keys based on a pair of transformations with density gap

*Presented by Corresponding Member of the NAS of Ukraine O.M. Trofimchuk*

We propose an algorithm of generation of the stable families of bijective polynomial maps  $f(n)$  of the  $n$ -dimensional affine space over a commutative ring  $K$  together with their inverse transformations. All maps are given in a standard basis, in which their degrees and densities are calculated. The method allows us to generate transformations  $f(n)$  of the linear density with degree given by the prescribed linear function  $d(n)$  and with exponential density for  $f(n)^{-1}$ . In the case of  $K = F_q$ , we can select  $f(n)$  of the exponential order. The scheme of generation of public keys of multivariate cryptography of the form  $g(n) = T_1 f(n) T_2$ , where  $T_1$  is a monomial linear transformation of  $K^n$ , and the degree of  $T_2$  is equal to 1, is proposed. The estimates of complexity show that the time of execution of the encryption rule coincides with the time of computation of the value of a quadratic multivariate map. The decryption procedure based on the knowledge of a generation algorithm is even faster. The security rests on the idea of the insufficiency of adversary's computational resources to restore the inverse map with exponential density and unbounded degree and on the absence of the known general polynomial algorithms to solve this task.

**Keywords:** post-quantum cryptography, multivariate cryptography, public keys, algebraic graphs, estimates of complexity.

**1. On the affine Cremona semigroup.** Let  $K$  be a commutative ring. Let us consider the totality  $SF_n(K)$  of all rules  $f$  of kind

$$x_1 \rightarrow f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), x_2 \rightarrow f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, x_n \rightarrow f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

for the given parameter  $n$  and a chosen commutative ring  $K$  with the natural operation of composition. We assume that each rule is written in its standard form, i.e., each polynomial  $f_i$  is given by the list of its monomials written in the chosen order. We refer to this semigroup as a semigroup of formal transformations  $SF_n(K)$  of the free module  $K^n$ . In fact, it is a totality of all endomorphisms of the ring  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  with the operations of their superposition.

Each rule  $f$  from  $SF_n(K)$  induces a transformation  $t(f)$  which sends the tuple  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  into  $(f_1(p_1, p_2, \dots, p_n), f_2(p_1, p_2, \dots, p_n), \dots, f_n(p_1, p_2, \dots, p_n))$ . The affine Cremona semigroup  $S(K^n)$  is the totality of all transformations of kind  $t(f)$ . The canonical homomorphism  $h: f \rightarrow t(f)$

maps the infinite semigroup  $SF_n(K)$  onto a finite semigroup  $S(K^n)$  in the case of finite commutative ring  $K$ .

We refer to the pair  $(f, f')$  of elements  $SF_n(K)$  such that  $f, f'$  and  $f' f$  are two copies of the identical rule

$$x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2, \dots, x_n \rightarrow x_n$$

as a pair of invertible elements. If  $(f, f')$  is such a pair, then the product  $t(f) t(f')$  is an identity map. Let us consider the subgroup  $CF_n(K)$  of all invertible elements of  $SF_n(K)$  (group of formal maps). It is clear that the image of a restriction of  $h$  on  $CF_n(K)$  is the affine Cremona group  $C(K^n)$  of all transformations of  $K^n$  onto  $K^n$ , for which there exists a polynomial inverse.

The semigroup  $SF_n(K)$  is an important object of the theory of symbolic computation or the so-called Computer Algebra (see [1]), which is a powerful instrument of Multivariate Cryptography [2, 3]. We will assume that each element  $f$  of this semigroup is written in the same basis in its standard form. The degree  $\deg(f)$  is the maximal degree of polynomials  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ . The density  $\text{den}(f)$  of  $f$  is the maximal number of monomial terms in  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

We say that a family of subsemigroups  $S_n$  of  $SF_n(K)$  (or  $S(K^n)$ ) is *stable* of degree  $d$ , if the maximal degree of elements from  $S_n$  is an independent constant  $d$ ,  $d > 2$ . If  $K$  is a finite commutative ring, then the stable semigroup has to be a finite set. The brief observation of the known families of stable groups and their cryptographical applications can be found in [4].

Let  $f(n)$  be a family of nonlinear maps from  $SF_n(K)$  of a degree bounded by the constant  $d$ . We say that  $f(n)$  form a *tame* family, if, in  $SF_n(K)$ , there is a family  $g(n)$  of a degree bounded by the constant  $d'$  such that  $f(n)g(n) = g(n)f(n)$  is an identity map. Let  $T_1(n)$  and  $T_2(n)$  be two families of elements from the group  $AGL_n(K)$  of all affine bijective transformations, i.e., elements of the affine Cremona group of degree 1. Then we refer to  $f'(n) = T_1(n)f(n)T_2(n)$  as a linear deformation of  $f(n)$ . Obviously,  $f'(n)$  is also a tame family of transformations, and the degrees of maps from this family are also bounded by  $d$ . The degrees of the inverses for  $f'(n)$  are bounded by  $d'$ .

Let  $G_n < CF_n(K)$  be a stable family of subgroups of degree  $d$ ,  $d > 1$ , then the nonlinear representatives  $f(n)$  of  $G_n$  form a tame family of maps. It is easy to see that the densities of  $f(n)$  and its linear deformations  $f'(n)$  can be very different. We refer to a pair of mutually invertible elements  $f(n), f(n)^{-1}$  from  $CF_n(K)$  as a pair with a density gap, if the density of  $f(n)$  is a polynomial expression in the variable  $n$ , and the density of  $f(n)^{-1}$  is bounded from below by an exponential function  $a^n$  with base  $a > 1$ .

Similarly, we refer to a pair of mutually invertible elements  $f(n), f(n)^{-1}$  from  $CF_n(K)$  as a pair with a degree, if the degree of  $f(n)$  is a polynomial expression in the variable  $n$ , and the degree of  $f(n)^{-1}$  is bounded from below by an exponential function  $a^n$  with base  $a > 1$ .

**2. On the explicit construction of stable maps of the prescribed degree and large order.** We define the Double Schubert Graph  $DS(k, K)$  over a commutative ring  $K$  as the incidence structure defined as a disjoint union of partition sets  $PS = K^{k(k+1)}$  consisting of points, which are tuples of kind  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{kk})$  and  $LS = K^{k(k+1)}$  consisting of lines, which are tuples of kind  $y = [y_1, y_2, \dots, y_k, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{kk}]$ , where  $x$  is incident to  $y$ , if and only if  $x_{ij} - y_{ij} = x_i y_j$  for  $i = 1, 2, \dots, k$  and  $j = 1, 2, \dots, k$ . It is convenient to assume that the indices of kind  $i, j$  are placed for tuples of  $K^{k(k+1)}$  in the lexicographical order.

*Remark.* The term Double Schubert Graph is chosen, because the points and lines of  $DS(k, F_q)$  can be treated as subspaces of  $F_q^{(2k+1)}$  of dimensions  $k+1$  and  $k$ , which form two largest Schubert cells. Recall that the largest Schubert cell is the largest orbit of the group of uni-triangular matrices acting on the variety of subsets of given dimensions (see [5] and references therein or [6]).

We define the color of a point  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1, x_{12}, \dots, x_{kk})$  from  $PS$  as the tuple  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  and the color of a line  $y = [y_1, y_2, \dots, y_k, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{kk}]$  as the tuple  $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ . For each vertex  $v$  of  $DS(k, K)$ , there is the unique neighbor  $y = N_a(v)$  of a given color  $a = (a_1 a_2, \dots, a_k)$ .

The *symbolic color*  $g$  from  $K[x_1, x_2, \dots, x_k]^k$  of  $v$  of kind  $(f_1(x_1, x_2, \dots, x_k), f_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_k))$ , where  $f_i$  are polynomials from  $K[x_1, x_2, \dots, x_k]$ , defines the neighboring line of the general point  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{kk})$  with color kind  $(f_1(x_1, x_2, \dots, x_k), f_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_k))$ . Similarly, we can compute the neighboring point of the general line  $[x] = [x_1, x_2, \dots, x_k, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{kk}]$  of color  $g$ .

Let us consider a tuple of symbolic colors  $g^1, g^2, \dots, g^{2t}$  from  $(K[x_1, x_2, \dots, x_k]^k)^{2t}$  and the map  $f$  of  $PS$  to itself, which sends the point  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{kk})$  to the end  $v_{2t}$  of the chaina  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2t}$ , where  $x = v_0, v_i \rightarrow v_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 2t-1$ , and the color of  $v_i$  is the tuple  $g_i$  of elements from  $K[x_1, x_2, \dots, x_k]$ . We refer to  $f$  as the map of the closed point-to-point computation with the symbolic key  $g^1, g^2, \dots, g^{2t}$  or simply the symbolic computation. As follows from the definitions,  $f = f_{g^1, g^2, \dots, g^{2t}}$  is a multivariate map of  $K^{k(k+1)}$  to itself. When the symbolic key is given,  $f$  can be computed in the standard form via the elementary operations of addition and multiplication of the ring  $K[x_1, x_2, \dots, x_k, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{kk}]$ . Recall that  $(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{kk})$  is our symbolic point of the graph.

We refer to expression  $f_{g^1, g^2, \dots, g^{2t}}$  as the automaton presentation of  $f$  with a symbolic key  $g^1, g^2, \dots, g^{2t}$ . Note that if  $t(g^{2t})$  is an element of the affine Cremona group  $C(K^k)$ , then  $f_{g^1, g^2, \dots, g^{2t}}$  is invertible, and the automaton presentation of its inverse has a symbolic key  $g^{-2t}, g^{2t-1}, g^{-2t}, g^{2t-2}, g^{-2t}, g^{2t-3}, \dots, g^{-2t}, g^1, g^{-2t}$ , where  $g^{-2t}$  is the inverse of the element  $g^{2t}$ .

The restrictions on degrees and densities of multivariate maps  $t(g^i)$  of  $K^k$  to  $K^k$  and the size of the parameter  $t$  allow us to define a polynomial map  $f$  with polynomial degree and density.

Let  $g^i = (h_1^i, h_2^i, \dots, h_k^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2t$ , be the symbolic key of the closed point-to-point computation  $f = f(n)$  of the symbolic automaton  $DS(k, K)$ . We refer to elements  $g^i$  as the governing functions of the symbolic key. We set that  $g^0 = (h_1^0, h_2^0, \dots, h_k^0) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Then  $f$  is a transformation of kind

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow h_1^{2t}(x_1, x_2, \dots, x_k), x_2 \rightarrow h_2^{2t}(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, x_k \rightarrow h_n^{2t}(x_1, x_2, \dots, x_k), \\ x_{11} &\rightarrow x_{11} - h_1^1 x_1 + h_1^1 h_1^2 - h_1^2 h_1^3 + h_1^3 h_1^4 + \dots + h_1^{2t-1} h_1^{2t}, \\ x_{12} &\rightarrow x_{12} - h_1^1 x_2 + h_1^1 h_2^2 - h_2^2 h_1^3 + h_1^3 h_2^4 + \dots + h_2^{2t-1} h_1^{2t}, \\ x_{kk} &\rightarrow x_{kk} - h_k^1 x_k + h_k^1 h_k^2 - h_k^2 h_k^3 + h_k^3 h_k^4 + \dots + h_k^{2t-1} h_k^{2t}. \end{aligned}$$

We say that the map  $f$  of the closed point-to-point computation is affine, if all elements  $g^i$  of the symbolic key are elements of degree  $< 2$ . We refer to a subsemigroup  $G$  in  $S(K^n)$  as a semigroup of degree  $d$ , if the maximal degree for a representative  $g$  equals  $d$ .

Let  $AGL_n(K)$  be the group of affine transformations of  $K^n$ , i.e., the group of all bijective transformations of degree 1.

Let us consider a semigroup  $E_k(K)$  introduced in [7], which consists of all transformations  $f_{h^1, h^2, \dots, h^l, g}$ , where degrees of  $h^i$  for  $i = 1, 2, \dots, l$  and  $g$  are bounded by 1, and  $l$  is an odd number. It is clear that  $E_k(K)$  is a stable subsemigroup of degree 2.

The group  $GL_n(F_q)$  contains Singer cycles, i.e., elements of order  $q^n - 1$  (see [8, 9]).

**Lemma 1.** *Let  $K = F_q$ , let  $f$  be the map of the closed point-to-point computation  $h^1, h^2, \dots, h^l, h$ , and let  $h$  defines a Singer Cycle from  $GL_n(F_q)$ . Then the order of  $f$  is at least  $q^k - 1$ .*

**Lemma 2.** *Let  $K = F_q$  and let  $f_{h^1, h^2, \dots, h^l, h}$  be an element of the semigroup  $E_k(K)$  such that  $h$  defines the map from  $GL_k(F_q)$  has an invariant subspace  $W$  of dimension  $m$ , and the restriction of  $h$  onto  $W$  is a Singer cycle. Then the stable semigroup  $\langle f \rangle$  generated by  $f$  contains at least  $q^m - 1$  elements.*

We consider two symbolic computations  $C_1$  and  $C_2$  with governing functions  $f^1, f^2, \dots, f^t$  and  $g^1, g^2, \dots, g^s$  and corresponding maps  $m_1 = m(C_1)$  and  $m_2 = m(C_2)$ . We refer to the symbolic computation  $C_1$  with governing functions  $f^1, f^2, \dots, f^t$  and  $g^1(f^t), g^2(f^t), \dots, g^s(f^t)$  as the concatenation of  $C_1$  and  $C_2$ . It is easy to see that the map corresponding to  $C$  is  $m_2(m_1)$ . So,  $C \rightarrow m(C)$  is homomorphism of two monoids.

Let us consider the totality  $PL = PL(k, K)$  of all point-to-point computations  $C$  with governing functions  $f^1, f^2, \dots, f^t$  with the last,  $f^t$  from  $K[x_1, x_2, \dots, x_k]^k$  of kind  $(l_1(x_1, x_2, \dots, x_k), l_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, l_k(x_1, x_2, \dots, x_k))$ , where all expressions  $l_i$  are of degree 1. It is easy to see that  $PL$  is a closed set with respect to the concatenation operation. We add the empty computation as a formal neutral element. This means that the maps of kind  $m(C)$  from  $PL$  form a subsemigroup  $S^{PL}$  of the affine Cremona semigroup  $S(K^{k(k+1)})$ .

Note that a map  $m(C)$  induced by a point-to-point computation  $C$  with governing functions  $f^1, f^2, \dots, f^t$ , where  $f^t$  has coordinates,  $f_1^t(x_1, x_2, \dots, x_k), f_2^t(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, f_k^t(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , is an invertible transformation of  $K^{k(k+1)}$ , if and only if the map

$$x_1 \rightarrow f_1^t(x_1, x_2, \dots, x_k), x_2 \rightarrow f_2^t(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, x_k \rightarrow f_k^t(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

is a bijection. It is clear that the invertible map  $m(C)^{-1}$  from  $S^{PL}$  is also an element of  $S^{PL}$ .

Let  $G^{PL}$  be the group of all invertible elements from  $PL$ . We define the degree of the governing function  $f^i$  given by a tuple with coordinates  $f_1^i(x_1, x_2, \dots, x_k), f_2^i(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, f_k^i(x_1, x_2, \dots, x_k)$  as the maximal degree of  $f_j^i$  for various  $i$  and  $j$ . Note that  $m(C)$  from  $G^{PL}$  can be an element with very large order. In fact, in the case of  $K = F_q$  and an arbitrary list of governing functions  $f^1, f^2, \dots, f^{t-1}$  and  $f^t$  for the given bilinear map

$$x_1 \rightarrow f_1^t(x_1, x_2, \dots, x_k), x_2 \rightarrow f_2^t(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, x_k \rightarrow f_k^t(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

which is a Singer cycle, i.e., its order is at least  $q^k - 1$ , the order of  $m(C)$  is also bounded from below by  $q^k - 1$ .

We can easily construct nonbijective maps of kind  $m(C)$  from  $S^{PL}$  such that the subgroup generated by this element consists of more than  $q^{k-c}$  elements for some constant  $c > 1$ . In fact, one can take  $f^t$  with the invariant subspace  $W$  of dimension  $k - c$  such that the restriction of  $f^t$  on  $W$  is a Singer cycle. It is convenient to consider the tuple  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  as a governing function  $f^0$

of the symbolic computation  $C$ . For the polynomials  $f^{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t/2$  which are colors of the points from  $DS(k, K[x_1, x_2, \dots, x_k])$ , we consider their maximal degree  $d_e$ . Let  $d_o$  be the maximal degree of  $f^{2i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t/2$ . Note that the degree of the polynomial map  $m(C)$  is bounded from above by  $d_e + d_o$ . In fact, the degree of this map is the maximum of products of coordinates of  $f^i$  and  $f^{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t - 1$ .

Let us consider the totality  $S^{rs}(PL)$  of maps  $m(C)$  for the symbolic computations with  $d_e$  equals at most  $r$  and  $d_o$  equals at most  $s$ .

**Theorem.** *The totality  $S^{rs}(PL(k, K))$  is a stable subsemigroup of the affine Cremona semigroup  $S(K^{k(k+1)})$  of degree  $r + s$ .*

It is clear that the intersection  $G^{rs}(PL(k, K))$  of  $G(PL)$  and  $S^{rs}(PL(k, K))$  is a stable subgroup of  $C(K^{k(k+1)})$  of degree  $r + s$ . Note that  $E_k(K)$  presented in [7] coincides with  $S^{11}(PL(k, K))$ .

**3. On the pairs of transformations with density gap and the corresponding public key.** Let us consider a point-to-point computation of the Schubert symbolic automaton from the semigroup  $S^{m1}(PL(n, K))$  with  $m = d(n)$  of kind  $an = b$ ,  $a > 1$  corresponding to the symbolic key  $f^1, f^2, \dots, f^t$  or some even parameter  $t$  with elements  $f^i$ ,  $i$  is odd, with degree linearly increasing in the variable  $n$  and finite density.

Then the corresponding transformation  $F$  will be of degree  $O(n)$  and linear density. Let us assume that  $f^t$  is a bijective map. Then, in majority cases, the inverse map  $F^{-1}$  given by the symbolic key formed by elements  $f^{t-1}(f^{-t}), f^{t-2}(f^{-t}), \dots, f^1(f^{-t}), f^{-t}$ , where  $f^{-t}$  is the inverse for  $f^t$ , will be of density  $O(n^n)$ . So, the pair  $F, F^{-1}$  is a pair with density gap.

We propose the following public key algorithm.

Alice chooses a finite commutative ring  $K$ , positive integer  $n$ , and a linear expression  $m = d(n)$ . She works with the Double Schubert graph  $DS(n, K)$  and the related symbolic automaton. Alice selects an odd parameter  $t$  and a symbolic key  $f^1, f^2, \dots, f^t$  for an invertible element of  $S^{m1}(PL(n, K))$ . She generates the polynomial map  $F$  corresponding to the computation with a chosen symbolic key. The standard form of this transformation can be computed with  $O(n^4)$  elementary operations (quadratic in the number of variables).

Alice selects the bijective monomial transformation  $T$  of  $V = K^{n(n+1)}$  given by a monomial matrix of size  $n(n+1)$  times  $n(n+1)$  with  $n(n+1)$  nonzero regular entries from  $K^*$  (each column and each row contains exactly one nonzero element). She takes the affine bijective transformation  $T$  of  $V$  and forms  $G = TFT$ . For the construction of  $G$ , Alice has to compute  $n^2$  linear combinations of the polynomial expression of  $n^2$  multivariate polynomials of density and degree  $O(n)$ . So, the total cost to form  $G$  is  $O(n^6)$  (cubic in the number of variables).

Alice sends the standard form of  $G$  to Bob. Note that  $G$  has degree  $O(n)$  and density  $O(n^3)$ .

Bob writes his plaintext  $p$  from  $V$  and computes the ciphertext  $c = G(p)$  in the time  $O(n^4)$  (quadratic time in the number of variables).

*Decryption process.* Assume that Alice keeps the already computed transformation  $T_1 = T^{-1}$  and  $T_2 = T^{-1}$ . Firstly, she computes  $T_1(c) = b$ . It takes  $O(n^4)$  elementary operations.

Now, she has the color  $t = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  of point  $(b)$ . Alice is looking for an intermediate vector  $v$  formed by the coordinates of point  $(v)$  such that  $F(v) = c$ . Let  $(r) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  be the color of point  $(v)$ . Alice has the inverse  $f^{-t}$  of the bijective affine map  $f^t$ . So, she computes  $(r) = f^{-t}(r)$  in the time  $O(n^2)$ . Now, Alice can compute values of  $f^1, f^2, \dots, f^{t-1}$  on the tuple  $(r)$ . This costs  $O(n)$  operations. After that, she computes  $v$  as the final element of the walk of length

$t$  with starting point ( $b$ ) and the prescribed colors of vertices. This costs  $O(n^2)$  elementary operations to Alice.

Finally, she gets the plaintext via the application  $T_2 = T^{-1}$  also in the time  $O(n^2)$ .

Other ideas of the usage of algebraic graphs for the construction of multivariate cryptosystems can be found in [13–15].

*This research is partially supported by the grant PIRSES-GA-2013-612669 of the 7th Framework Programme of the European Commission.*

## REFERENCES

1. Machi, A. (2012). Algebra for symbolic computation. Springer.
2. Ding, J., Gower, J. E. & Schmidt, D. S. (2006). Multivariate public key cryptosystems. Advances in Information Security, Vol. 25. Springer.
3. Goubin, L., Patarin, J. & Yang, Bo-Yin. (2011). Multivariate cryptography. In Encyclopedia of Cryptography and Security. 2nd ed. (pp. 824-828). Springer.
4. Ustimenko, V. (2017). On the families of stable multivariate transformations of large order and their cryptographical applications. Tatra Mt. Math. Publ., 70, pp. 107-117.
5. Ustimenko, V. A. (2015). On Schubert cells in Grassmannians and new algorithm of multivariate cryptography. Tr. Inst. Mat., 23, No. 2, pp. 137-148.
6. Ustimenko, V. A. (1998). On the varieties of parabolic subgroups, their generalizations and combinatorial applications. Acta Appl. Math., 52, pp. 223-238.
7. Ustimenko, V. (2017). On desynchronised multivariate El Gamal algorithm. Retrieved from <https://eprint.iacr.org/2017/712.pdf>
8. Cossidente, A. & de Ressmine, M. J. (2004). Remarks on Singer cycle groups and their normalizers. Designs Codes Cryptogr., 32, pp. 97-102.
9. Kantor, W. (1982). Linear groups containing a Singer cycle. J. Algebra, 62, pp. 232-234.
10. Ustimenko, V. (2015). On algebraic graph theory and non-bijective maps in cryptography. Algebra Discrete Math., 20, No. 1, pp. 152-170.
11. Ustimenko, V. (2017). On new multivariate cryptosystems with nonlinearity gap. Algebra Discrete Math., 23, No. 2, pp. 331-348.
12. Ustimenko, V. (2017). On new multivariate cryptosystems based on hidden Eulerian equations. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 5, pp. 17-24. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovid2017.05.017>
13. Romańczuk-Polubiec, U. & Ustimenko, V. (2015). On two windows multivariate cryptosystem depending on random parameters. Algebra Discrete Math., 19, No. 1, pp. 101-129.
14. Ustimenko, V. & Romańczuk, U. (2013). On dynamical systems of large girth or cycle indicator and their applications to multivariate cryptography. In Artificial Intelligence, Evolutionary Computing and Metaheuristics (pp. 257-285). Berlin: Springer.
15. Polak, M., Romańczuk, U., Ustimenko, V. & Wróblewska, A. (2013). On the applications of extremal graph theory to coding theory and cryptography. Electron. Notes Discrete Math., 43, pp. 329-342.

Received 13.03.2018

B.O. Устименко

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ  
Університет Марії Кюрі-Склодовської, Люблін, Польща  
E-mail: vasylustimenko@yahoo.pl

ПРО КРИПТОСИСТЕМИ ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ,  
ЩО ГРУНТУЮТЬСЯ НА ПАРІ ПЕРЕТВОРЕНЬ З ПРОВАЛОМ У ЩІЛЬНОСТІ

Пропонується алгоритм породження стабільних родин взаємно однозначних відображень  $f(n)$  у  $n$ -вимірному афінному просторі над комутативним кільцем  $K$  разом з оберненими до них перетвореннями. Всі відображення подані у стандартному базисі, в якому обчислюються їх степінь та щільність. Метод дозво-

ляє генерувати перетворення  $f(n)$  лінійної щільності зі степенем, заданим обраною лінійною функцією  $d(n)$  та зі щільністю експоненціального розміру для  $f(n)^{-1}$ . У випадку  $K = F_q$  ми можемо обрати  $f(n)$  експоненціального порядку. Пропонується схема генерування публічних ключів поліноміальної криптографії від багатьох змінних вигляду  $g(n) = T_1 f(n) T_2$ , де  $T_1$  є мономіальним лінійним перетворенням, а степінь  $T_2$  дорівнює 1. Оцінки складності показують, що час виконання правила шифрування збігається з часом обчислення значення квадратичного поліноміального відображення. Процедура декодування, що базується на знанні алгоритму генерації, є ще більш швидкою. Безпека ґрунтується на ідеї недостатності обчислювальних ресурсів у опонента для відновлення оберненого відображення експоненціальної щільності і необмеженого степеня та відсутності відомих поліноміальних алгоритмів для розв'язання цієї задачі.

**Ключові слова:** постквантовая криптография, криптография від багатьох змінних, публічні ключі, алгебраїчні графи, оцінки складності.

*B.A. Устименко*

Институт телекоммуникаций и глобального  
информационного пространства НАН Украины, Киев  
Университет Марии Кюри-Склодовской, Люблин, Польша  
E-mail: vasylustimenko@yahoo.pl

## О КРИПТОСИСТЕМАХ ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ОСНОВАННЫХ НА ПАРЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ПРОВАЛОМ В ПЛОТНОСТИ

Предлагается алгоритм порождения стабильных семейств взаимно однозначных отображений  $f(n)$  в  $n$ -мерном аффинном пространстве над коммутативным кольцом  $K$  вместе с обратными к ним преобразованиями. Все отображения заданы в стандартном базисе, в котором вычисляются их степени и плотности. Метод позволяет генерировать преобразование  $f(n)$  линейной плотности со степенью, заданной выбранной линейной функцией  $d(n)$  и с плотностью экспоненциального размера для  $f(n)^{-1}$ . В случае  $K = F_q$  мы можем выбрать  $f(n)$  экспоненциального порядка. Предлагается схема генерации публичных ключей полиномиальной криптографии от многих переменных вида  $g(n) = T_1 f(n) T_2$ , где  $T_1$  является мономиальным линейным преобразованием, а степень  $T_2$  равна единице. Оценки сложности показывают, что время выполнения правила шифрования совпадает с временем вычисления значения квадратичного полиномиального отображения. Процедура декодирования, основывающаяся на знании алгоритма генерации, является еще более быстрой. Безопасность основывается на недостатке вычислительных ресурсов у оппонента для восстановления обратного отображения экспоненциальной плотности и неограниченной степени и на отсутствии эффективных алгоритмов для решения этой задачи.

**Ключевые слова:** постквантовая криптография, криптография от многих переменных, публичные ключи, алгебраические графы, оценки сложности.

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.028>

УДК 622.279

**А.Ф. Булат, О.П. Круковський,  
В.В. Круковська, К.А. Безручко**

Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, Дніпро  
E-mail: igtm@ukr.net

## **Чисельне моделювання геомеханічних і фільтраційних процесів, що відбуваються в породному масиві при відпрацюванні газових родовищ**

*Представлено академіком НАН України А.Ф. Булатом  
та членом-кореспондентом НАН України О.П. Круковським*

*Розроблено математичну модель процесів, що протикають при розробці газового родовища. Враховано вплив напружено-деформованого стану на проникність породного масиву та вплив зміни тиску газу в колекторі на напруженій стан масиву. Для тестової моделі газового родовища отримано розподілі значень напружень, переміщень, тиску газу в колекторі на різних часових ітераціях. Наведено графіки зміщень земної поверхні та зміни різних геомеханічних параметрів. Показано, що значне зниження тиску газу при тривалій експлуатації родовища зумовлює деформування вищерозміщеної товщі гірських порід. Підвищена різноманітність поля напружень спричиняє зростання проникності порід поблизу пласта-колектора при виснаженні запасів вуглеводнів.*

**Ключові слова:** чисельне моделювання зв'язаних процесів, деформування породного масиву, фільтрація газу, розробка газового родовища.

Огляд результатів досліджень напружено-деформованого стану масивів гірських порід при розробці газових родовищ показав: видобуток вуглеводнів зумовлює деформування колекторів і гірських порід, що їх вміщують. Зазначені деформації можуть мати різноманітний характер: пружний, пружно-пластичний тощо [1]. Картину зміни напружено-деформованого стану масиву гірських порід при розробці нафтових і газових родовищ характеризують просадка земної поверхні, руйнування обсадних колон свердловин, зміна колекторських властивостей продуктивних пластів і їх газовіддача [2]. Зміна поля напружень, що пов'язана з видобутком вуглеводнів, може призводити до активізації розломів, тим самим викликаючи сейсмічність [3].

Нізькопроникні колектори вельми чутливі до деформації системи “продуктивний пласт—гірські породи”. Геодинамічні процеси, що протикають в таких колекторах, можуть викликати порушення суцільності продуктивного пласта, утворення і розвиток мікротріщинуватості і, як наслідок, збільшення фільтраційної проникності [4].

© А.Ф. Булат, О.П. Круковський, В.В. Круковська, К.А. Безручко, 2018

Однак механізм і закономірності деформування шаруватого породного масиву, що вміщує пласти-колектори газу, в процесі розробки газового родовища вивчені недостатньо. На сьогодні не існує універсальних методів і універсальних обчислювальних комплексів для вирішення задач цього класу, які могли б мати практичне значення. У зв'язку з цим необхідно застосовувати комбінований метод досліджень, який включає натурні спостереження і вимірювання, а також чисельне моделювання поведінки складної багатошарової і багатокомпонентної структури газового родовища протягом тривалого часу, в тому числі після завершення його експлуатації.

При розробці газових родовищ відбувається процес фільтрації газу з порового простору колектора в свердловину, пластовий тиск знижується, що призводить до перерозподілу поля напружень. Тому математична модель, що відображає перебіг цих процесів у часі повинна включати зв'язані рівняння зміни напруженого-деформованого стану твердого тіла і несталої фільтрації газу. Зміна в часі напруженого-деформованого стану породного масиву без урахування сил інерції описується системою рівнянь [5]:

$$\sigma_{ij,j} + X_i(t) + T_i(t) + P_i(t) = 0, \quad (1)$$

де  $\sigma_{ij,j}$  — похідні від компонент тензора напружень по  $x, y$ ;  $X_i(t)$  — проекції зовнішніх сил, що діють на одиницю об'єму тіла;  $T_i(t)$  — проекції сил, викликаних внутрішнім тертям, що діють на одиницю об'єму тіла;  $P_i(t)$  — проекції сил, зумовлених тиском флюїдів в тріщинувато-пористому середовищі.

Сили  $T_i(t)$  пропорційні швидкості зміни переміщення:

$$T_i(t) = -c_s \frac{\partial}{\partial t} u_i,$$

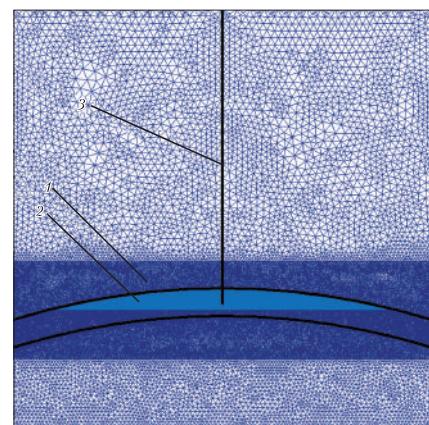
де  $c_s$  — коефіцієнт демпфування;  $u_i$  — переміщення.

В якості початкових і граничних умов для поставленої задачі задаються:

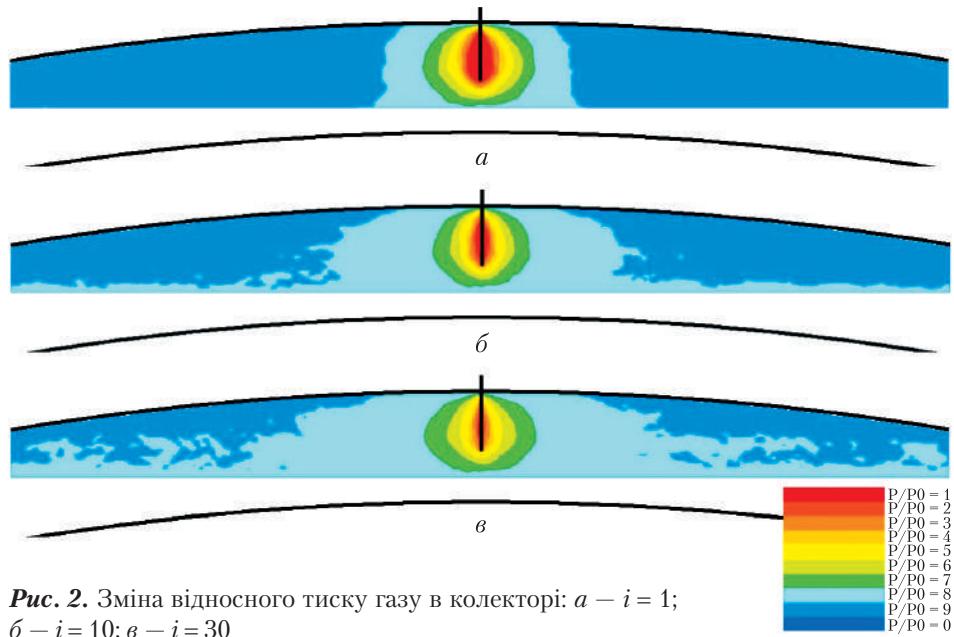
$$\sigma_{yy}|_{t=0} = \gamma h; \quad \sigma_{xx}|_{t=0} = \lambda \gamma h; \quad u_x|_{\Omega_1} = 0; \quad u_y|_{\Omega_2} = 0, \quad (2)$$

де  $\sigma_{ij}$  — компоненти тензора напружень;  $\gamma$  — усереднена вага вищерозташованих гірських порід;  $\lambda$  — коефіцієнт бокового розпору;  $h$  — глибина розробки;  $\Omega_1$  — вертикальні межі зовнішнього контуру;  $\Omega_2$  — горизонтальні межі зовнішнього контуру.

Сумарна сила, прикладена в точках розглянутої області, дорівнює сумі сил, зумовлених дією геостатичного тиску і тиску газу, що визначається шляхом розв'язання задачі про фільтрацію газу в тріщинувато-пористому деформівному середовищі. Задача розв'язується в пружно-пластичній постановці [6]. Для математичного опису процесу переходу гірських порід в порушеній стан застосовується критерій міцності Кулона—Мора [7]. Для аналізу напруженого-деформованого стану породного ма-



**Рис. 1.** Фрагмент скінченно-елементної сітки: 1 — непроникні породи; 2 — пласт-колектор газу; 3 — свердловина



**Рис. 2.** Зміна відносного тиску газу в колекторі:  $a - i = 1$ ;  $b - i = 10$ ;  $c - i = 30$

сиву використовуються параметри, що характеризують різноманітність поля напружень і розвантаження від гірського тиску [8]:

$$Q^* = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\gamma h}; \quad P^* = \frac{\sigma_3}{\gamma h},$$

де  $\sigma_1, \sigma_3$  — максимальна і мінімальна компоненти тензора головних напружень.

Рівняння нерозривності газового потоку [5] в плоскій постановці при наявності джерела газовиділення можна представити у вигляді:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + K \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + q(t) = 0, \quad (3)$$

де  $p$  — тиск газу;  $K$  — проникність масиву, що дорівнює сумі природної та техногенної проникності,  $K = k + k_{\text{техн}}$ ;  $q(t)$  — функція газовиділення.

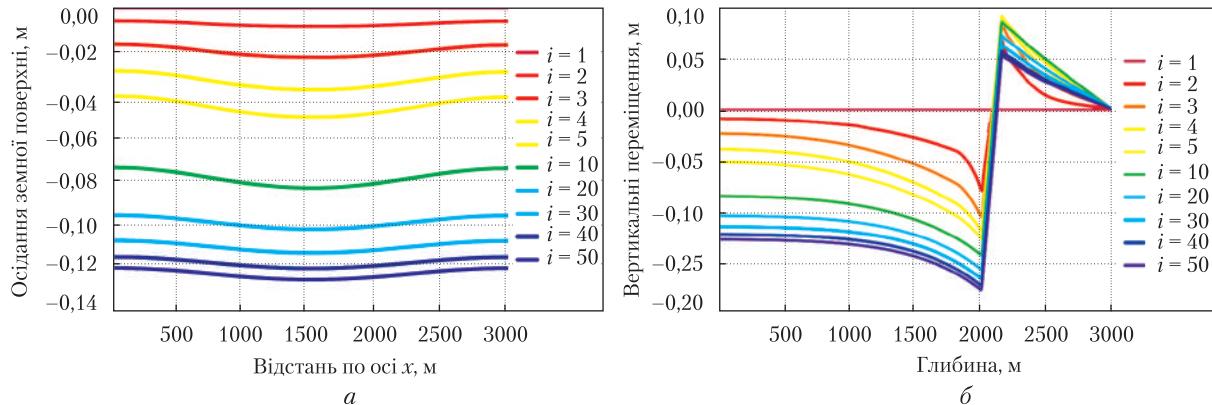
У процесі видобутку вуглеводнів змінюється поле напружень в породному масиві, що призводить до зміни його проникності. На поле природної проникності  $k$  накладається поле техногенної проникності  $k_{\text{техн}}$ , яке залежить від співвідношення компонент тензора головних напружень [9].

Початкові і граничні умови для цієї задачі:

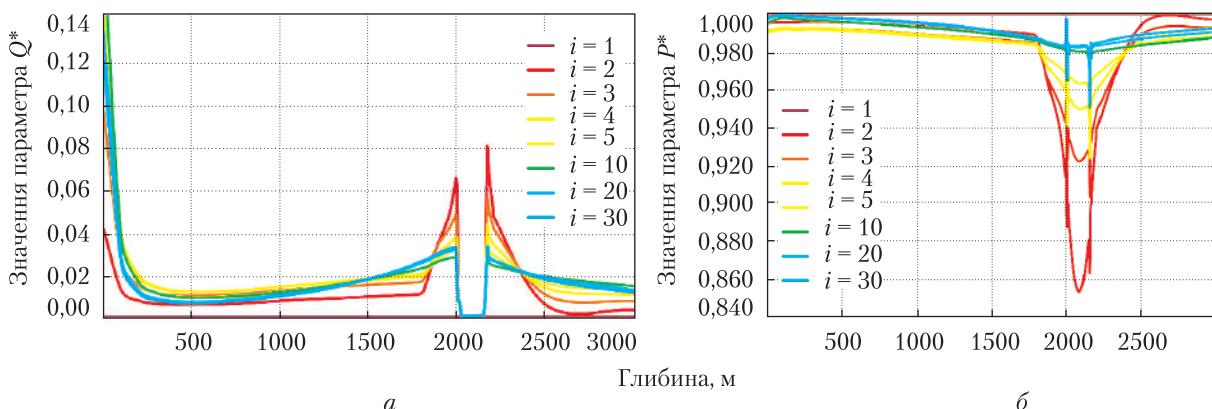
$$p|_{t=0} = p_0, \quad p|_{\Omega_3(t)} = p_0; \quad p|_{\Omega_4} = p_{\text{св}}, \quad (4)$$

де  $p_0$  — тиск газу в момент часу  $t = 0$ ;  $\Omega_3(t)$  — межа області фільтрації, що змінюється у часі;  $\Omega_4$  — контур свердловини;  $p_{\text{св}}$  — тиск у свердловині.

Система рівнянь (1)–(3) з початковими і граничними умовами (2) та (4) розв'язується за допомогою методу скінченних елементів.



**Рис. 3.** Осадання земної поверхні на різних часових ітераціях (а) та вертикальні зміщення вздовж прямої, що проходить через центр скінченно-елементної моделі, на різних часових ітераціях (б)



**Рис. 4.** Розподіл значень параметрів  $Q^*$  (а) та  $P^*$  (б) на різних часових ітераціях

Розглянемо область породного масиву розміром  $3000 \times 3000$  м. Верхня межа області – земна поверхня. Пласт-колектор газу знаходитьться на глибині 2000–2200 м (по центру). Радіус кривизни пласта – 5000 м. Висота області колектора, зайнятої газом, – 150 м (по центру). Початковий тиск газу в резервуарі – 20 МПа. Колектор має початкову проникливість, зверху і знизу він обмежений непроникними породами. Скінченно-елементна сітка, яка використовується при розрахунках, показана на рис. 1.

На початку експлуатації газового родовища зміна тиску газу в пласті-колекторі незначна і не впливає помітно на зміну поля напружень, зміщення породних шарів і земної поверхні. На рис. 2 показано розподіл відносного тиску газу в колекторі на різних часових ітераціях  $i$ , на початковому етапі роботи свердловини при фіксованих витратах газу.

Виснаження запасів газу викликає помітний перерозподіл поля напружень в резервуарі та у вмісних породах. Максимальні переміщення точок породного масиву і земної поверхні відбуваються після того, як тиск газу в колекторі падає до мінімального значення  $P_{\min}$ . Припустимо, що  $P_{\min} = 3$  МПа і виконаємо розрахунок при фіксованому значенні пластового тиску  $p = P_{\min}$ .

На рис. 3, а показано зміщення земної поверхні на різних часових ітераціях, на рис. 3, б – вертикальні зміщення вздовж прямої, що проходить через центр скінченно-елементної моделі. Видно, що максимальне зміщення – в центральній точці поверхні моделі, над свердловиною при  $x = 1500$ , рис. 3, а. На 50-й часовій ітерації  $u = 12,5$  см.

В результаті значного зниження пластового тиску газу в колекторі і стиснення під дією ваги вищерозміщеної породної товщі відбувається зменшення об'єму газоносного пласта. Породи, розташовані над колектором ( $h < 2000$  м), зміщуються вниз ( $u < 0$ ), рис. 4, б під колектором ( $h > 2150$  м) – вгору ( $u > 0$ ). Видно, що максимальні значення переміщень “підробленого” масиву з плином часу зростають швидше. При  $i = 50$  вони перевищують максимальні значення переміщень порід, розташованих нижче колектора, вдвічі. Прийнята в даній моделі однорідність фізико-механічних властивостей гірських порід зумовлює рівномірність їх деформування.

На рис. 4 представлена графіки зміни значень параметрів  $Q^*$  і  $P^*$ , що характеризують напружений стан породного масиву, вздовж вертикальної прямої, яка проходить через центр скінченно-елементної моделі. Підвищена різнокомпонентність поля напружень поблизу пласта-колектора, рис. 4, а, обумовлює можливість збільшення тріщинуватості, тому проникність порід в цій зоні при виснаженні колектора може збільшитися. На завершальному етапі експлуатації газового родовища значення параметра  $P^*$  в області колектора мінімальні (рис. 4, б), що свідчить про розвантаження пласта в цій зоні. Згодом криві  $P^*$  вирівнюються, перерозподіл поля напружень призводить до просідання гірського масиву над пластом-колектором.

Таким чином, розроблено математичну модель “зміна напружено-деформованого стану породного масиву – не стала фільтрація газу” для моделювання процесів, що відбуваються при розробці газового родовища. Виконано чисельне моделювання зміни геомеханічних і фільтраційних параметрів на початковому і кінцевому етапах розробки для тестової моделі газового родовища. Отримано розподіли значень напружень, деформацій, тиску газу в колекторі на різних часових ітераціях. Побудовано графіки зміщення земної поверхні, вертикальних переміщень, зміни значень геомеханічних параметрів. Показано, що значне зниження тиску газу при тривалій експлуатації родовища зумовлює деформування вищерозміщеної товщі гірських порід. Підвищена різнокомпонентність поля напружень поблизу пласта-колектора зумовлює можливість збільшення тріщинуватості, тому проникність порід в цій зоні при виснаженні колектора може зростати.

Для дослідження нерівномірності деформації верхніх породних шарів, зумовленої відмінністю їх міцнісних властивостей, а також можливості зміни фільтраційних властивостей колекторів-супутників при їх “підробці” необхідна побудова більш складної чисельної моделі свити газоносних пластів.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. Геомеханика и флюидодинамика. Москва: Недра, 1996. 448 с.
2. Трубецкой К.Н., Гурьянов В.В. Интенсификация газоотдачи угольных пластов на основе регулирования их напряженно-деформированного состояния. Уголь. 2006. № 2. С. 64–66.
3. Orlic B., Wassing B.T. A Study of Stress Change and Fault Slip in Producing Gas Reservoirs Overlain by Elastic and Viscoelastic Caprocks. *Rock Mech. Rock Eng.*, 2013. P. 421–435.

4. Зотов Г.Ф., Динариев О.Ю., Крупин Г.С. и др. Физические явления в низкопроницаемых деформируемых породах при разработке месторождений природного газа. Геотехнологические проблемы разработки месторождений природного газа. Москва: ВНИИГАЗ. 1992. С. 15–24.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Butterworth-Heinemann, 2000. 690 p.
6. Круковский А.П., Круковская В.В. Обзор существующих методов расчета напряженно-деформированного состояния и устойчивости массива горных пород. *Геотехн. механика*. 2002. № 36. С. 178–186.
7. Баклашов И.В., Картозиya Б.А. Механика подземных сооружений и конструкций крепей. Москва: Недра, 1984. 415 с.
8. Круковский А.П., Курносов С.А., Круковская В.В. и др. Определение рациональных параметров породно-анкерных и охранных конструкций на сопряжении лавы с выемочным штреком. *Вісн. КрНУ ім. Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 4(99). С. 54–60.
9. Круковская В.В. Моделирование связанных процессов, происходящих в углепородном массиве при ведении горных работ. *Геотехн. механика*. 2015. № 121. С. 48–99.

Надійшло до редакції 02.05.2018

## REFERENCES

1. Nikolaevskiy, V. N. (1996). Geomechanics and Fluid Dynamics, Moscow: Nedra (in Russian).
2. Trubetskoy, K. N. & Guryanov, V. V. (2006) Intensification of coal seams gas recovery on the basis of regulation of their stress-strain state. Coal, No. 2, pp. 64-66 (in Russian).
3. Orlic, B. & Wassing, B. T. (2013). A Study of Stress Change and Fault Slip in Producing GasReservoirs Overlain by Elastic and Viscoelastic Caprocks. Rock Mech. Rock Eng., pp. 421-435.
4. Zotov, G. F., Dinariev, O. Yu., Krupin, G. S. et al. (1992). Physical phenomena in low-permeability deformable rocks in the development of natural gas fields. Geotekhnologicheskie problemy razrabotki mestorozhdeniy prirodnogo gaza, Moscow: VNIIGAZ, pp. 15-24 (in Russian).
5. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000). The finite element method. Butterworth-Heinemann.
6. Krukovskiy, A. P. & Krukowska, V. V. (2002). Review of existing methods for calculating the stress-strain state and stability of a rock massif. Geotechnical Mechanics, No. 36, pp.178-186 (in Russian).
7. Baklashov, I. V. & Kartoziya, B. A. (1984.) Mechanics of underground structures and supports constructions. Moscow: Nedra (in Russian).
8. Krukovskiy, A. P., Kurnosov, S. A. & Krukowska, V. V. (2016). Determination of rational parametres for the rock-bolting and protective structures in the face end. Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, No. 4(99), pp. 54-60 (in Russian).
9. Krukowska, V. V. (2015). Simulation of coupled processes that occur in coal-rock massif during mining operations. Geotechnical Mechanics, No. 121, pp.48-99 (in Russian).

Received 02.05.2018

А.Ф. Булат, А.П. Круковский,

В.В. Круковская, К.А. Безручко

Інститут геотехніческої механіки ім. Н.С. Полякова НАН України, Дніпр

E-mail: igtm@ukr.net

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ И ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, ПРОИСХОДЯЩИХ В ПОРОДНОМ МАССИВЕ ПРИ ОТРАБОТКЕ ГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Разработана математическая модель процессов, происходящих при разработке газового месторождения. Учтено влияние напряженного состояния на проницаемость породного массива и влияние изменения давления газа в коллекторе на напряженное состояние массива. Для тестовой модели газового месторождения получены распределения значений напряжений, перемещений, давления газа в коллекторе на различных временных итерациях. Построены графики смещения земной поверхности и изменения различных геомеханических параметров. Показано, что значительное снижение давления газа при длительной эксплуатации месторождения обуславливает деформирование вышележащей толщи горных

пород. Повышенная разнокомпонентность поля напряжений приводит к росту проницаемости пород вблизи пласта-коллектора при истощении запасов углеводородов.

**Ключевые слова:** численное моделирование связанных процессов, деформирование породного массива, фильтрация газа, разработка газового месторождения.

*A.F. Bulat, A.P. Kruckovskiy,  
V.V. Kruckovska, K.A. Bezruchko*

Institute of Geotechnical Mechanics of the NAS of Ukraine, Dnipro  
E-mail: igtm@ukr.net.

#### **NUMERICAL SIMULATION OF GEOMECHANICAL AND FILTRATION PROCESSES IN A ROCK MASSIF DURING THE GAS FIELD DEVELOPMENT**

A mathematical model of the processes occurring during the gas field development is created. In it, the effect of a stressed state on the rock permeability and the effect of a gas pressure in the reservoir on the stress state of the massif are taken into account. Distributions of values of gas stresses, displacements, and the pressure in the reservoir at various time iterations are specified for a testing model of the gas field. Curves of Earth's surface displacement and changes of various geomechanical parameters are built. It is shown that a significant reduction of the gas pressure during the long-term field development causes deformations of the overlying rock massif. High variability of the stress field leads to an increased rock permeability near the reservoir bed, when hydrocarbon reserves are depleted.

**Keywords:** numerical simulation of coupled processes, rock massif deformation, gas filtration, gas-field development.

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.035>

УДК 539.421

**М.Ф. Селіванов, Ю.О. Чорноіван**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

## **Модель зони зчеплення з нерівномірним законом зчеплення—відриву для системи декількох колінеарних тріщин**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України В. М. Назаренком*

Для оцінки граничного рівня навантаження на елементи конструкції, які містять тріщини із зонами передруйнування, широко використовується модель зони зчеплення. У статті розглянуто навантаження нескінченої пластини із системою колінеарних тріщин нормального відриву прикладеними на нескінченості розтягувальними зусиллями. Використано метод розв'язання задач механіки тріщин в рамках моделі зони зчеплення, який був запропонований авторами. Розв'язок для розкриттів тріщин знайдено для нерівномірного зв'язку між зчепленням та відривом з урахуванням умови плавності змикання берегів. Побудовано числові розв'язки для декількох значень параметра форми степеневого закону зчеплення—відриву. Проілюстровано залежність розкриття у вершинах фізичних тріщин від рівня зовнішнього навантаження. Встановлено, що його критичний рівень практично не залежить від параметра форми.

**Ключові слова:** модель зони зчеплення, руйнування, закон зчеплення—відриву, функція форми, умова скінченності напружень, колінеарні тріщини.

Руйнування квазікрихких матеріалів відбувається переважно внаслідок зародження, поширення та злиття мікротріщин. Біля вершин тріщин в таких матеріалах утворюються зони, що містять напівзруйнований матеріал, який ще здатний витримувати навантаження. Зони послаблених зв'язків біля вершин тріщин називають зонами процесу руйнування або зонами передруйнування. Моделювання цих зон у більшості випадків здійснюється в рамках моделі зони зчеплення з рівномірним законом зчеплення—відриву (модель Леонова—Панасюка—Дагдейла—Баренблата). Зону моделюють додатковим розрізом на продовженні тріщини, до берегів якого прикладено стягуючі береги напруження зчеплення  $\sigma$  сталої ( $\sigma = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\max}$  — міцність зчеплення, яка є параметром тріщиностійкості) або залежної від відстані до вершини інтенсивності ( $\sigma = \sigma(x)$ ). Довжину додаткового розрізу називають довжиною зони передруйнування або довжиною зчеплення. Для знаходження цієї довжини слід задоволити вимогу скінченності напружень у вершині зони (ця вимога еквівалентна умові плавності змикання берегів). У випадку декількох незалежних довжин зчеплення, їх

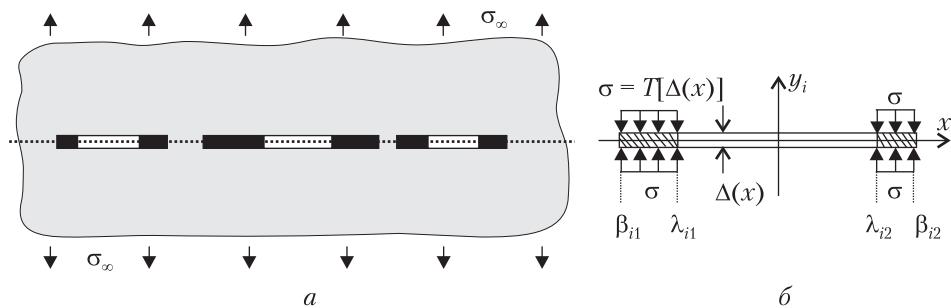


Рис. 1

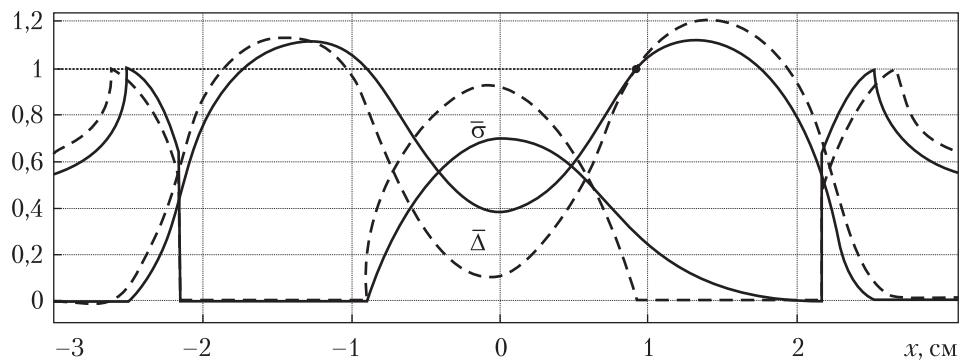
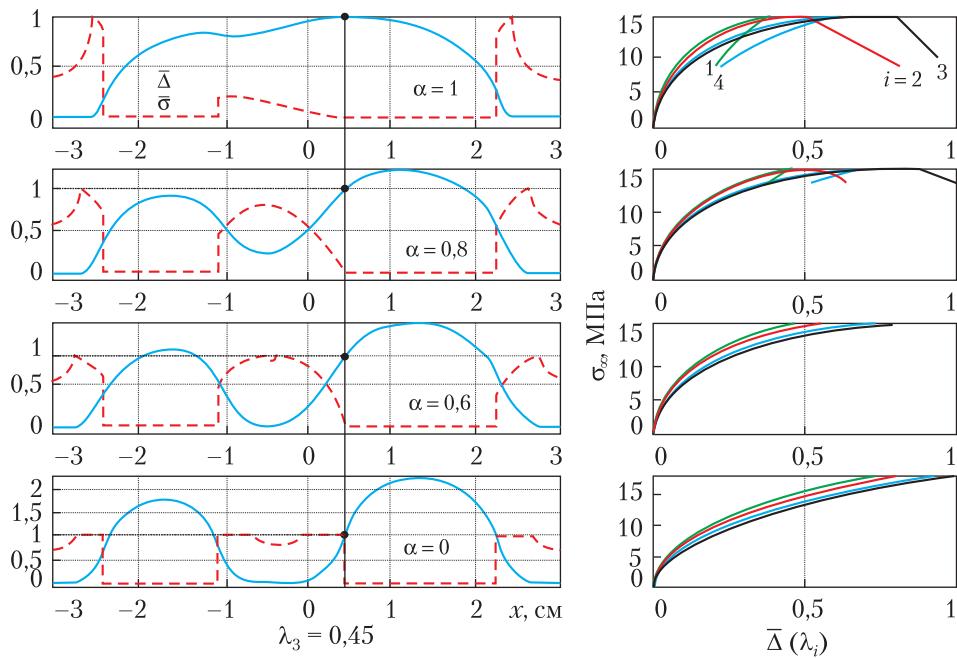


Рис. 2

можна визначити з системи відповідної кількості рівнянь і для визначених величин записати розв'язок (розкриття берегів тріщини). За величиною розкриття (відриву) у вершині фізичної тріщини можна дослідити стан граничної рівноваги ( знайти або критичну комбінацію параметрів навантаження або граничний рівень довжини тріщини при заданому навантаженні). Стан граничної рівноваги досягається, коли розкриття у вершині фізичної тріщини та робота сил зчеплення одночасно досягають своїх критичних значень  $\Delta_{\max}$  (критичне розкриття) та  $\phi$  (енергія руйнування, другий параметр тріщиностійкості).

Вивчення процесу руйнування сучасних матеріалів не обмежується використанням рівномірного закону зчеплення—відриву. При використанні моделі зони зчеплення за нерівномірного закону ( $\sigma = T(\Delta)$ ,  $\Delta$  — відрив, що відповідає зчепленню  $\sigma$ ) задача про систему колінеарних тріщин значно ускладнюється. Окрім двох основних параметрів тріщиностійкості  $\sigma_{\max}$  та  $\phi$ , у розгляд вводяться параметри форми (параметри функції  $T$ ), вплив яких на граничний рівень навантаження треба з'ясовувати окремо. Для визначення довжин зчеплення слід розв'язувати нелінійну систему рівнянь відносно цих довжин числовим методом, на кожному кроці якого необхідно отримати розв'язок зв'язаної (зчеплення—відрив) задачі теорії пружності. Складнощі виникають і при дослідженні стану граничної рівноваги, який може бути досягнуто при навантаженні, більшому за те, яке відповідає максимальному можливому розкриттю  $\Delta_{\max}$  [1]. Іншими словами, залежність  $\Delta(\lambda) - \sigma_{\infty}$  ( $\lambda$  характеризує розташування вершини фізичної тріщини з найбільшим розкриттям,  $\sigma_{\infty}$  — параметр зовнішнього навантаження) може набути свого максимально можливого значення у внутрішній точці інтервалу  $(0, \Delta_{\max})$ . Аналіз опублікованих досліджень з даної тематики свідчить про



**Рис. 3**

те, що дослідниками ще не наведено прикладів розв'язання задач про систему колінеарних тріщин в рамках моделі зони зчеплення з нерівномірним законом зчеплення–відриву.

Вивченю взаємодії двох тріщин однакової довжини при  $\sigma = \sigma_{\max}$  присвячені роботи [2–4], для нерівних довжин розв'язки представлено в [5–7]. Для отримання розв'язку симетричної задачі слід, як і у випадку однієї несиметричної тріщини, знайти дві невідомі довжини зчеплення з нелінійною системи рівнянь (або одну невідому довжину у разі об'єднаної внутрішньої зони). Для знаходження розкриття системи  $m$  колінеарних тріщин різної довжини така система буде містити не більше  $2m$  рівнянь. У роботі [8] досліджено взаємний вплив трьох колінеарних тріщин. Показано, як зі збільшенням рівня зовнішнього навантаження відбувається об'єднання внутрішніх зон передруйнування. При моделюванні про утворення спільної внутрішньої зони свідчить відсутність розв'язку задачі з відокремленими зонами сусідніх вершин системи. Отже, при розв'язанні таких задач зі збільшенням навантаження необхідно переходити від одного типу граничних умов до іншого. Щоб уникнути такої незручності в роботі [9] запропоновано метод розв'язання задач теорії тріщин в рамках моделі зони зчеплення, що спирається на методи дослідження контактної взаємодії берегів тріщини. Цей метод у даній роботі поширило на випадок системи колінеарних тріщин при нерівномірному законі зчеплення–відриву.

**Постановка і методика розв'язування задачі.** Розглянемо систему  $m$  колінеарних тріщин у нескінченому ізотропному тілі (на рис. 1, а ( $m = 3$ )). Отримаємо розв'язок задачі для найпростішого типу навантаження, коли рівномірно розподілені розтягувальні зусилля прикладено на нескінченності. Тріщини розташовано вздовж осі  $x$ ; ліва і права вершини фізичної тріщини відповідають точкам  $\lambda_{i1}$  та  $\lambda_{i2}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) відповідно (тріщини занумеровано направо). В моделі зони зчеплення матеріал поза зоною вважається лінійно пруж-

ним. Отже, для розв'язання задачі можна використовувати принцип суперпозиції. Навантаження на тіло із системою трьох колінеарних тріщин із зонами передруйнування зображене на рис. 1, а; параметри моделі для  $i$ -ї тріщини із зонами передруйнування наведено на рис. 1, б. Границні умови запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_y^+(x) &= -\sigma_\infty + \sigma(x), \quad x \in (\beta_{11}, \beta_{m2}), \\ \Delta'(\beta_{ik}) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, 2,\end{aligned}\tag{1}$$

де напруження  $\sigma(x)$  пов'язане з відповідним розкриттям законом зчеплення—відриву

$$\sigma(x) = \begin{cases} T[\Delta(x)], & x \in \bigcup_{i=1}^m ((\beta_{i1}, \lambda_{i1}) \cup (\lambda_{i2}, \beta_{i2})), \\ 0, & x \in \bigcup_{i=1}^m (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}). \end{cases}$$

Друга умова в (1) має виконуватись для необ'єднаних внутрішніх зон ( $\beta_{i2} < \beta_{(i+1)1}$ ).

Для знаходження невідомого розкриття та напруження вздовж лінії розташування тріщин виберемо інтервал  $(-\delta, \delta)$  так, щоб він напевно містив тріщини з їх зонами зчеплення, довжини яких наперед невідомі. Сформулюємо модифіковані граничні умови

$$\begin{aligned}\sigma_y^+(x) &= -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x), \quad |x| < \delta, \\ \hat{T}(\Delta) &= \begin{cases} T(\Delta), & \Delta \geq 0, \\ P(\Delta), & \Delta < 0, \end{cases}\end{aligned}\tag{2}$$

що дозволяє використати результати [9] для знаходження розв'язку. В основі методу лежить квадратурний метод розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь [10] та ітеративна процедура визначення контактних напружень, що виникають між берегами тріщини [11]. В даній роботі результати отримаємо без врахування логарифмічної особливості похідної від розкриття, але врахувати цю особливість можна використавши результати [12]. Границні умови (2) отримано з (1) шляхом заміни  $\sigma(x)$  різницею подовженого на від'ємний відрив зчеплення  $\hat{T}$  та додаткового напруження  $\hat{\sigma}$ , яке визначається умовою невід'ємності відриву.

**Числові розв'язки.** На рис. 2 наведено відносні відриви та відповідні напруження вздовж лінії розташування колінеарних тріщин, отримані для  $T(\bar{\Delta}) = (1 - \bar{\Delta})^\alpha$  ( $\bar{\Delta} = \Delta / \Delta_{\max}$ ,  $\Delta_{\max} = (\alpha + 1)\phi / \sigma_{\max}$ ) при  $\alpha = 0,7$ ,  $\sigma = 35$  МПа,  $\phi = 300$  Н/м,  $E = 40$  ГПа,  $-\lambda_1 = \lambda_4 = 2,16$  см,  $-\lambda_2 = \lambda_3 = 0,9$  см (две тріщини рівної довжини),  $\delta = 3$  см. Для вказаного закону зчеплення—відриву в (2) можна покласти  $P(\Delta) = \sigma_{\max}$ . Для граничного значення  $\Delta(\lambda_3) = \Delta_{\max}$  було знайдено два розв'язки з об'єднаними внутрішніми зонами. Перший розв'язок є симетричним (відповідає суцільному кривим), у той час як другий (штрихові криві) характеризується докритичним станом у внутрішній вершині лівої тріщини  $\Delta(\lambda_2) = \Delta_{\max}$ . Значення граничного навантаження для двох наведених розв'язків становлять відповідно 15,4 та 17,6 МПа.

Для фіксованих значень  $\Delta(\lambda_3)$  отримаємо розв'язок задачі для двох колінеарних тріщин різної довжини, зображеній на рис. 3. Відносні відриви та відповідні напруження

вздовж лінії розташування колінеарних тріщин для  $\bar{\Delta}(\lambda_3)=1$  та декількох значень параметра форми показано у першому стовпці блоків рис. 3, рівень зовнішнього навантаження  $\sigma_\infty$ , як функцію найбільшого з відривів у вершинах фізичних тріщин  $\Delta(\lambda_3)$ , зображену у другому стовпці блоків рис. 3. Також проілюстровано відповідні величини  $\Delta(\lambda_i)$  ( $i \neq 3$ ). Числові результати отримано при параметрах попередньої задачі, окрім положень вершин фізичної тріщини, які становлять  $-\lambda_1 = 2,4$  см,  $-\lambda_2 = 1,05$  см,  $\lambda_3 = 0,45$  см та  $\lambda_4 = 2,25$  см.

Параметр форми істотно впливає на довжину зчеплення. Зі зменшенням цього параметра (наближенням закону зчеплення до рівномірного) довжина зчеплення значно зменшується. Так, для значень  $\alpha = 1$  та  $0,8$  внутрішні зони є об'єднаними, для  $\alpha = 0,6$  ці зони є близькими до об'єднання, в той час як для  $\alpha = 0$  вони віддалені на величину довжини зчеплення. Злами на залежностях  $\Delta(\lambda_i) - \sigma_\infty$  зумовлені об'єднанням внутрішніх зон. Для  $\alpha = 0,6$  можна прослідкувати екстремум вказаної залежності, але максимальне значення  $\sigma_\infty$  несуттєво відрізняється від значення, що відповідає  $\bar{\Delta}(\lambda_3)=1$ . Також відзначаємо незначну залежність максимального рівня зовнішнього навантаження від параметра форми  $\alpha$ ; цей рівень для обраних  $\alpha$  трохи перевищує 15 МПа.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Stang H., Olesen J.F., Poulsen P.N., Dick–Nielsen L. On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials. *Mater. Struct.* 2007. **40**. P. 365–374. doi: <https://doi.org/10.1617/s11527-006-9179-8>
2. Chang D., Kotousov A. A strip yield model for two collinear cracks in plates of arbitrary thickness. *Int. J. Fract.* 2002. **176**. P. 39–47. doi: <https://doi.org/10.1007/s10704-012-9724-0>
3. Feng X.Q., Gross D. On the coalescence of collinear cracks in quasi-brittle materials. *Eng. Fract. Mech.* 2000. **65**. P. 511–524. doi: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(99\)00139-3](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(99)00139-3)
4. Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини. *Допов. Нац. акад. наук України*. 2011. № 11. С. 51–60.
5. Bhargava R.R., Jangid K. Strip-coalesced interior zone model for two unequal collinear cracks weakening piezoelectric media. *Appl. Math Mech.* 2014. **35** (10). P. 1249–1260. doi: <https://doi.org/10.1007/s10483-014-1890-9>
6. Theocaris P.S. Dugdale models for two collinear unequal cracks. *Eng. Fract. Mech.* 1983. **18** (3). P. 545–559. doi: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(83\)90048-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(83)90048-6)
7. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Yu.O. Determination of displacement of the faces of two collinear cracks of different lengths within the framework of the Leonov-Panasyuk model. *J. Math. Sci.* 2013. **190** (14). P. 1–16. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1775-5>
8. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model. *Int. J. Solids Struct.* 2013. **50** (19). P. 2929–2942. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.010>
9. Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Вплив довжини зчеплення на рівень критичного навантаження для тіла з тріщиною нормального відриву. *Допов. Нац. акад. наук України*. 2018. № 8. С. 36–44. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovid2018>
10. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. Solution of singular integral equations. Methods of analysis and solutions of crack problems. *Mechanics of Fracture*. 1973. **1**. P. 368–425. doi: [https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5\\_7](https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5_7)
11. Gross D., Heimer St. Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load. *Eng. Fract. Mech.* 1993. **46**. P. 633–640. doi: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(93\)90169-S](https://doi.org/10.1016/0013-7944(93)90169-S)
12. Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю.О. Порівняння алгоритмів визначення переміщення берегів тріщини зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук України*. 2017. № 7. С. 29–36. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovid2017.07.029>

Надійшло до редакції 13.03.2018

## REFERENCES

1. Stang, H., Olesen, J.F., Poulsen, P.N. & Dick-Nielsen, L. (2007). On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials. *Mater. Struct.*, 40, pp. 365-374. doi: <https://doi.org/10.1617/s11527-006-9179-8>
2. Chang, D. & Kotousov, A. (2002). A strip yield model for two collinear cracks in plates of arbitrary thickness. *Int. J. Fract.*, 176, pp. 39-47. doi: <https://doi.org/10.1007/s10704-012-9724-0>
3. Feng, X. Q. & Gross, D. (2000). On the coalescence of collinear cracks in quasi-brittle materials. *Eng. Fract. Mech.*, 65, pp. 511-524. doi: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(99\)00139-3](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(99)00139-3)
4. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2011). Study of a displacement of crack edges for two collinear cracks of equal length. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 11, pp. 51-60 (in Ukrainian).
5. Bhargava, R. R. & Jangid, K. (2014). Strip-coalesced interior zone model for two unequal collinear cracks weakening piezoelectric media. *Appl. Math Mech.*, 35 (10), pp. 1249-1260. doi: <https://doi.org/10.1007/s10483-014-1890-9>
6. Theocaris, P. S. (1983). Dugdale models for two collinear unequal cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 18 (3), pp. 545-559. doi: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(83\)90048-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(83)90048-6)
7. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2013). Determination of displacement of the faces of two collinear cracks of different lengths within the framework of the Leonov-Panasyuk model. *J. Math. Sci.*, 190 (14), pp. 1-16. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1775-5>
8. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2013). Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model. *Int. J. Solids Struct.*, 50 (19), pp. 2929-2942. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.010>
9. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2018). Cohesive zone length influence on the critical load for mode I crack. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 8, pp. 36-44 (in Ukrainian).
10. Erdogan, F., Gupta, G. D. & Cook, T. S. (1973). Solution of singular integral equations. Methods of analysis and solutions of crack problems. *Mechanics of Fracture*, 1, pp. 368-425. doi: [https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5\\_7](https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5_7)
11. Gross, D. & Heimer, St. (1993). Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load. *Eng. Fract. Mech.*, 46, pp. 633-640. doi: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(93\)90169-S](https://doi.org/10.1016/0013-7944(93)90169-S)
12. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2017). Comparison of the crack opening displacement determination algorithms for a cohesive crack. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 7, pp. 29-36 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.029> (in Ukrainian).

Received 13.03.2018

*М.Ф. Селиванов, Ю.А. Черноіван*

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенко НАН України, Київ  
E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

## МОДЕЛЬ ЗОНЫ СЦЕПЛЕНИЯ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ЗАКОНОМ СЦЕПЛЕНИЯ—ОТРЫВА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕСКОЛЬКИХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН

Для оценки предельного уровня нагрузки на элементы конструкции, содержащие трещины с зонами предразрушения, широко используется модель зоны сцепления. В статье рассмотрено действие на бесконечную пластину с системой коллинеарных трещин нормального отрыва растягивающих усилий, приложенных на бесконечности. Использован метод решения задачи механики трещин, предложенный авторами. Решение для раскрытий трещин найдено для неравномерной связи между сцеплением и отрывом с учетом условия плавности смыкания берегов. Построены числовые решения для нескольких значений параметра формы степенного закона сцепления—отрыва. Проиллюстрирована зависимость раскрытия в вершинах физических трещин от уровня внешней нагрузки. Установлено, что его критический уровень практически не зависит от параметра формы.

**Ключевые слова:** модель зоны сцепления, разрушение, закон сцепления—отрыва, функция формы, условие конечности напряжений, коллинеарные трещины.

*M.F. Selivanov, Yu.O. Chornoivan*

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

**THE COHESIVE ZONE MODEL  
WITH A NON-UNIFORM TRACTION-SEPARATION LAW  
FOR A SYSTEM OF SEVERAL COLLINEAR CRACKS**

The cohesive zone models are widely used for assessments of the critical loading level on structures. Here, an infinite plate with mode I collinear cracks is studied under a uniform tension applied at infinity. A proposed technique is applied to solve the problem basing on the cohesive crack model. The solution for the crack opening is found for a non-uniform traction-separation law with regard for the condition of smooth closure of the crack lips. Numerical results are presented for several values of the traction-separation law shape parameter. Some illustrations are given for the dependence of the crack opening on the external loading. It is found that its critical level is almost independent of the shape parameter.

**Keywords:** cohesive zone model, fracture, traction–separation law, shape parameters, finite stress condition, collinear cracks.

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.042>

УДК 539.3

**М.П. Семенюк<sup>1</sup>, В.М. Трач<sup>2</sup>, Н.Б. Жукова<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

<sup>2</sup> Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

## **До континуальної розрахункової моделі стійкості нанотрубок з напівсферичними кришками**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України В. М. Назаренком*

Для дослідження стійкості вуглецевих нанотрубок запропоновано континуальну розрахункову модель, в основу якої покладено нелінійну теорію анізотропних оболонок середнього згину. Проведено розрахунок критичних станів для нанотрубок з напівсферичними кришками та без них при різних граничних умовах і різних зовнішніх навантаженнях.

**Ключові слова:** теорія оболонок, стійкість, вуглецева нанотрубка, напівсферичні кришечки, зовнішній тиск, осьовий стиск.

Дослідженням стійкості вуглецевих нанотрубок присвячені численні роботи [1–10]. Інтерес до цієї задачі зумовлений тим, що вигин нанотрубок при втраті стійкості може істотно погіршити високі показники їх пружності і міцності, тепло- і електропровідності, змінити їх функціонування в нанопристрої [7]. Було відзначено, що нанотрубки можуть бути закриті половиною фуллерена – напівсферичної поверхні, що утворює кінцеві кришечки (рис.1). Однак у більшості робіт зі стійкості нанотрубок вони розглядаються як порожністі циліндри без урахування кінцевих півсфер [3, 5, 6]. При цьому основна увага приділяється стійкості циліндричної частини і обґрунтуванню застосування до розрахунку таких нанорозмірних об'єктів як вуглецеві трубки континуальної оболонкової моделі циліндричної форми або стрижневої моделі [3, 9, 10]. На додаток до експериментальних методів дослідження розроблялися також теоретичні моделі, що враховують дискретну структуру нанотрубок [6, 10]. Поєднання різних підходів дало можливість прийти до висновку, що при малих деформаціях зазначені континуальні моделі можуть бути застосовані до розрахунку стійкості нанотрубок. Але останні є специфічним об'єктом із доволі широким діапазоном співвідношень товщини, радіуса і довжини і тому до розрахунку нанотрубок необхідно в кожному випадку проводити додаткову перевірку можливості застосування того чи іншого підходу [9].

У даній роботі пропонується розрахункова модель, на підставі якої розглядається вплив кінцевих напівсферичних кришок на стійкість нанотрубок при рівномірному зовнішньому

тиску і осьовому стиску. Ряд експериментальних досліджень показують, що при навантаженні в поздовжньому і поперечному напрямках вуглецева нанотрубка виявляє анізотропні властивості. У зв'язку з цим в основу континуальної моделі покладено нелінійну теорію анізотропних оболонок такого типу, яка є придатною як при малих, так і при великих довжинах оболонок.

1. Потенціальна енергія деформації тонких шаруватих анізотропних оболонок може бути записана у вигляді [11]

$$P = \iint_{\Omega} L(\varepsilon, \kappa) d\Omega, \quad (1)$$

де

$$L(\varepsilon, \kappa) = \frac{1}{2} (\varepsilon^T C \varepsilon + 2\varepsilon^T B \kappa + \kappa^T D \kappa). \quad (2)$$

У виразах (2) використані векторно-матричні позначення

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

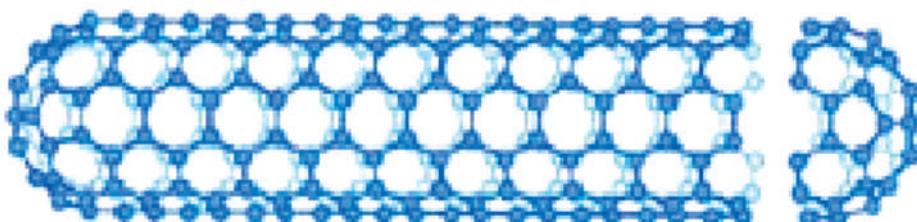
$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Компонентами векторів  $\varepsilon$  і  $\kappa$  є тангенціальні деформації оболонки  $\varepsilon_{ij}$  і збільшення кривизн і кручення  $k_{ij}$  [11]. Компоненти матриці жорсткостей розтягу та зсуву  $C$ , матриці жорсткостей взаємопливу  $B$  і жорсткостей вигину  $D$  обчислюються з точністю до квадратичних членів [11, 12].

Відповідно до методу Гамільтона [13] утворюємо канонічний інтеграл

$$A_R = \iint [T_1 \varepsilon_1(u) + T_{13}(\theta + \theta_1(u)) - H_g] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - U, \quad (5)$$

де  $\varepsilon_1(u)$  — вектор, компонентами якого є вирази деформацій,  $\varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{12}(u), k_{11}(u)$ ,  $T_{13}$  — множник Лагранжа;  $U$  — робота зовнішніх навантажень. В (5) варіюються переміщення, а також зусилля  $T_{11}, T_{12}, T_{13}$  і момент  $M_{11}$  [11].



**Рис. 1.** Нанотрубка з півсферичними кінцевими кришками

Варіація роботи  $\delta U$  може бути представлена у вигляді

$$\delta U = \iint (q_1 \delta u + q_2 \delta v + q_3 \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \int_{\alpha_2} \left[ T_{11}^0 \delta u + \left( T_{12}^0 - \frac{M_{12}^0}{R_2} \right) \delta v + \left( T_{13}^0 + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial \alpha_1} \right) \delta w + M_{11}^0 \delta \theta \right] \Big|_{\alpha_1} A_2 d\alpha_2. \quad (6)$$

де  $q_i$  — поверхневі навантаження;  $T_{ij}^0, M_{ij}^0$  — зусилля і моменти, прикладені до контурних ліній, що обмежують поверхню. На ділянках ліній, де задані переміщення, граничні умови вважаємо виконаними.

Використовуючи умови стаціонарності функціоналу (5), отримаємо

$$\iint \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \alpha_2} + a_1(T_{12}^* + T_{21}^*) + a_2(T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_1} T_{13}^* + q_1 \right] \delta u + \\ + \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \alpha_2} + a_2(T_{12}^* + T_{21}^*) - a_1(T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_2} T_{23}^* + q_1 \right] \delta v + \\ + \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23}^*}{\partial \alpha_2} + a_2 T_{13}^* + a_1 T_{23}^* + \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{23}}{R_2} + q_3 \right] \delta w - \\ - \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} + 2a_1 M_{12} + a_2(M_{11} - M_{22}) - T_{13} \right] \delta \theta - \\ - \{[\varepsilon_{11}(u) - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} - A_{13}M_{11} + d_{11}\varepsilon_{22} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{12}] \delta T_{11} - \\ - [\varepsilon_{12}(u) - A_{12}T_{11} - A_{22}T_{12} - A_{23}M_{11} + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}k_{22} + d_{23}k_{12}] \delta T_{12} - \\ - [k_{11}(u) - A_{13}T_{11} - A_{23}T_{12} - A_{33}M_{11} + d_{31}\varepsilon_{22} + d_{32}k_{22} + d_{33}k_{12}] \delta M_{11} - \\ - [\theta_1(u) + \theta] \delta T_{13}\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ - \int_{\alpha_2} \left\{ \left[ (T_{11} - T_{11}^0) \delta u + \left( T_{12}^* - T_{12}^0 + 2 \frac{M_{12}}{R_2} \right) \delta v + (T_{13}^* - T_{13}^0) \delta w - (M_{11} - M_{11}^0) \delta \theta \right] \right\} \Big|_{\alpha_1} A_2 d\alpha_2 = 0. \quad (7)$$

Тут:  $A_{ij}$  — компоненти матриці  $H_{11}^{-1}$ ;  $d_{ij}$  — компоненти матриці  $H_{11}^{-1} H_{12}$  [11]

$$T_{12}^* = T_{12} + T_{11}\omega_1 - \frac{2}{R_2} M_{12}, \quad T_{21}^* = T_{12} + T_{22}\omega_2, \quad T_{13}^* = T_{13} + T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2,$$

$$T_{23}^* = \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - a_1(M_{11} - M_{22}) + 2a_2 M_{12} + T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2,$$

$$T_{22} = d_{11}T_{11} + d_{21}T_{12} + d_{31}M_{11} + (C_{22}^* - C_{22}^0)\varepsilon_{22} + (B_{22}^* - B_{22}^0)k_{22} + (B_{26}^* - B_{26}^0)k_{12}, \quad (8)$$

$$M_{22} = d_{12}T_{11} + d_{22}T_{12} + d_{32}M_{11} + (B_{22}^* - B_{22}^0)\varepsilon_{22} + (D_{22}^* - D_{22}^0)k_{22} + (D_{26}^* - D_{26}^0)k_{12},$$

$$M_{12} = d_{13}T_{11} + d_{23}T_{12} + d_{33}M_{11} + (B_{26}^* - B_{26}^0)\varepsilon_{22} + (D_{26}^* - D_{26}^0)k_{22} + (D_{26}^* - D_{66}^0)k_{12}.$$

З огляду на незалежність варіацій  $\delta T_{ij}$ , і  $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta$  кожний доданок в варіаційному рівнянні (7) можна прирівняти до нуля. Отримаємо вісім рівнянь в частинних похідних. Їх можна використати для скорочення розмірності задачі, якщо апроксимувати незалежні функції по одній з координат. Після приведення рівнянь в частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь, отримаємо канонічну систему рівнянь, яка після деяких перетворень набуває нормального вигляду.

Лінеарізуємо рівняння

$$\Pi_i = 0, \quad i = 1, \dots, 8, \quad (9)$$

де  $\Pi_i$  — диференціальні вирази в квадратних дужках при незалежних варіаціях зусиль і переміщень в рівнянні (7). Вважаємо, що на оболонку діє осесиметричне навантаження, тому функції з індексом “с” від окружної координати не залежать. Рівняння  $\Pi_i = 0$  в околі критичної точки зберігає свій вигляд, відрізняючись від вихідних тільки тим, що вони будуть однорідними.

З огляду на замкнутість оболонки по окружній координаті зусилля, моменти і переміщення є періодичними функціями координати  $\alpha_2$ . В якості цієї координати візьмемо кут  $\phi$ , який відраховується від початкового меридіана уздовж дуги кола в напрямку, що забезпечує правобічність системи координат  $\alpha_1, \alpha_2, z$ . Подамо розв’язок у вигляді рядів Фур’є. В цьому випадку

$$(T_{11}, T_{12}, T_{13}, M_{11}, u, v, w, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{11,n}, T_{12,n}, T_{13,n}, M_{11,n}, u_n, v_n, w_n, \theta_n) e^{in\phi}. \quad (10)$$

При негативних значеннях  $n$  амплітуди функцій  $f_{-n} = \bar{f}_n$ , де  $\bar{f}_n$  — комплексна величина, сполучена до  $\bar{f}_n$ .

Якщо підставити (10) в лінеаризоване рівняння  $\Pi_i = 0$ , то отримаємо систему з восьми звичайних диференціальних рівнянь в нормальному вигляді

$$\frac{dy_i}{d\alpha_1} = F_i(y_{i,c}, y_i), \quad (11)$$

де

$$y_1 = T_{11,n}, \quad y_2 = T_{12,n}^*, \quad y_3 = T_{13,n}^*, \quad y_4 = M_{11}, \quad y_5 = u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta. \quad (12)$$

Природні граничні умови формулюються відносно функцій  $y_i (i = 1, \dots, 4)$ . Для розв’язання системи рівнянь (11) при відповідних граничних умовах використовуємо метод дискретної ортогоналізації [4,14].

2. Розглянемо оболонку, поверхня якої утворена обертанням навколо осі  $x$  плоскої кривої, яка складається з двох кіл і прямої, що паралельна осі  $x$  (рис.2). У прямокутній системі координат  $x, y$  рівняння такої кривої можна записати у вигляді

$$y = \sqrt{2Rx - x^2} \text{ при } 0 < x \leq R, \\ y = R \text{ при } R < x < R + L, \\ y = \sqrt{2Rx' - x'^2} \text{ при } x' = x - L, \quad R \leq x' \leq 2R. \quad (13)$$

Необхідні в рівняннях коефіцієнти Ламе і радіуси кривизни визначаються з використанням відомих співвідношень диференціальної геометрії і виразів (13):

для сферичних частин

$$A_1 = \frac{R}{y}, \quad A_2 = y, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{R-x}{Ry}, \quad R_1 = R, \quad R_2 = R,$$

для циліндричної частини

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = R.$$

Оболонку такого виду можна розглядати в якості континуальної моделі нанотрубки з напівсферичними кінцевими кришками. Вважаємо, що оболонка знаходиться під дією всебічного зовнішнього тиску (див. рис. 2). При проведенні розрахунків будемо використовувати параметри нанотрубок, отримані в роботі [10]. Згідно з [10], нанотрубка є ізотропною з модулем пружності  $E = 5,5$  ТПа, коефіцієнтом Пуассона 0,19, радіусом  $R = 0,61$  нм, товщиною  $t = 0,066$  нм. Довжина нанотрубок варіється від  $L/R = 2,64$  до  $L/R = 39,15$ . Оболонка складається з двох частин, кожна з яких окремо має різні критичні значення інтенсивності тиску, причому для оболонки сферичної форми вони значно вищі, ніж для циліндричної того ж радіуса [11]. Як це позначається на стійкості складової конструкції розглянемо, аналізуючи стійкість нанотрубок різної довжини зі сферичними кришечками і без них. При цьому передбачається, що в полюсах півсфер є маленький круговий отвір, на контурі якого задаються граничні умови. Радіус отвору вибирається таким, щоб його вплив на результати розрахунку був мінімальним. Наявність полюсного отвору зумовлена необхідністю усунення особливості в розв'язувальних рівняннях задачі.

У табл. 1 наведені результали розрахунку критичних значень інтенсивності зовнішнього тиску, обчисленого в нН/нм<sup>2</sup>, що рівномірно розподілений по всій поверхні, при різних граничних умовах. У першій графі таблиці наведені значення довжини нанотрубок ( $L$ ).

Таблиця 1. Критичні значення інтенсивності зовнішнього тиску

$L$ , нм	Шарнірне опирання обох торців		Жорстке защемлення обох торців		Жорстке защемлення, вільний край	
	оболонка з кришками	оболонка без кришок	оболонка з кришками	оболонка без кришок	оболонка з кришками	оболонка без кришок
1	2	3	4	5	6	7
1,609	7,08	6,06	7,09	7,03	7,06	3,06
2,104	5,89	4,57	5,94	6,46	5,88	2,81
2,846	3,99	3,53	4,02	5,49	3,98	2,63
4,083	2,98	2,90	3,00	3,74	2,98	2,52
5,321	2,68	2,67	2,69	3,09	2,68	2,48
7,796	2,51	2,53	2,52	2,65	2,51	2,45
10,271	2,48	2,48	2,47	2,53	2,46	2,44
11,509	2,46	2,47	2,46	2,45	2,44	2,44
17,697	2,44	2,44	2,44	2,45	2,44	2,44
23,880	2,43	2,44	2,44	2,44	2,43	2,43

Для оболонок з кришками до неї додаються два радіуси кінцевих півсфер, друга і третя графі містять критичні значення інтенсивності тиску для випадку шарнірного опирання обох торців оболонки з кришечками і без них відповідно. З наведених результатів розрахунків видно, що при  $L < 5,321$  оболонки мають різні критичні навантаження, причому вони вищі для оболонок з кінцевими півсферами. При  $L > 5,321$  відмінність між ними стає незначною.

У четвертій і п'ятій графах наведені результати обчислень для таких же оболонок, але при жорсткому закріпленні торців. Тут для оболонок малої і середньої довжини критичні навантаження вищі за відсутності кінцевих півсфер, ніж для оболонок з ними. При  $L > 7,796$  геометрія торців впливає на стійкість оболонок незначно. У шостій і сьомій графах табл. 1 наведені критичні значення інтенсивності тиску для оболонок розглянутих типів при одному вільному і другому жорстко закріпленим торцях в залежності від довжини циліндричної частини нанотрубки. Оболонка зі сферичним торцем має значно вищі критичні навантаження в разі малої і середньої довжини. При  $L > 7,796$  оболонки обох типів при всіх розглянутих варіантах граничних умов мають одинакові критичні навантаження.

Нанотрубки зі товщиною  $t = 0,066$  нм і радіусом  $R = 0,61$  нм не можна віднести до тонких оболонок, так як  $R/t = 9,24$ . У табл. 2 наведені результати розрахунку критичних навантажень нанотрубок зі сферичними торцями при вільному одному з них і жорстко закріплениму іншому в залежності від довжини  $L$ . Значення критичного тиску  $q_k$  отримані за викладеною методикою, а  $q_T$  — за методикою, що розроблена на основі теорії оболонок Тимошенко—Міндліна [11]. Наведені в останній графі табл. 2 величини  $q'$  відношення уточненого критичного навантаження до навантаження, що отримано в рамках гіпотези Кірхгофа—Лява ( $q' = q_T/q_K$ ), показують, що для коротких нанотрубок при дослідженії їх стійкості слід використовувати теорію Тимошенко—Міндліна.

На рис. 3 наведені криві, що ілюструють вигляд вигнутих при втраті стійкості твірних циліндричних нанотрубок без сферичних кришок (крива 1) і зі сферичними кришками (крива 2). Розглядаються оболонки з одним вільним і іншим жорстко закріпленим торцями. Довжина нанотрубок без урахування радіусів кінцевих півсфер дорівнює 1,609 та 5,321 нм, відповідно. Вигляд деформованої циліндричної оболонки без кришок характеризується істотним прогином в околі вільного торця, в той час як у випадках нанотрубок сферичними

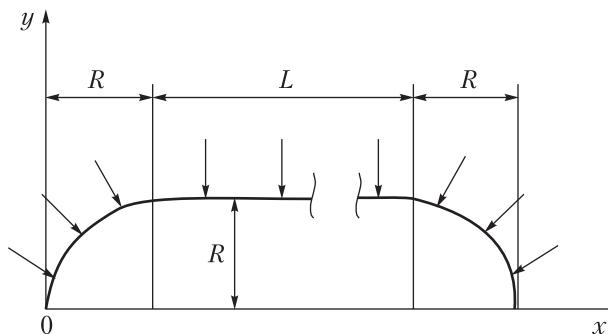


Рис. 2. Схема оболонки з навантаженнями

Таблиця 2. Критичні навантаження нанотрубок з одним вільним, а другим жорстко закріпленим сферичними торцями

$L$ , нм	$q_K$	$q_T$	$q'$
1,609	7,06	5,66 ( $n=3$ )	0,80
2,104	5,88	4,29 ( $n=2$ )	0,73
2,846	3,98	3,34	0,84
4,083	2,98	2,77	0,93
5,321	2,68	2,58	0,96
7,796	2,51	2,46	0,98
10,271	2,46	2,42	0,98
11,509	2,44	2,42	0,99
17,697	2,44	2,40	0,99
23,880	2,43	2,40	0,99

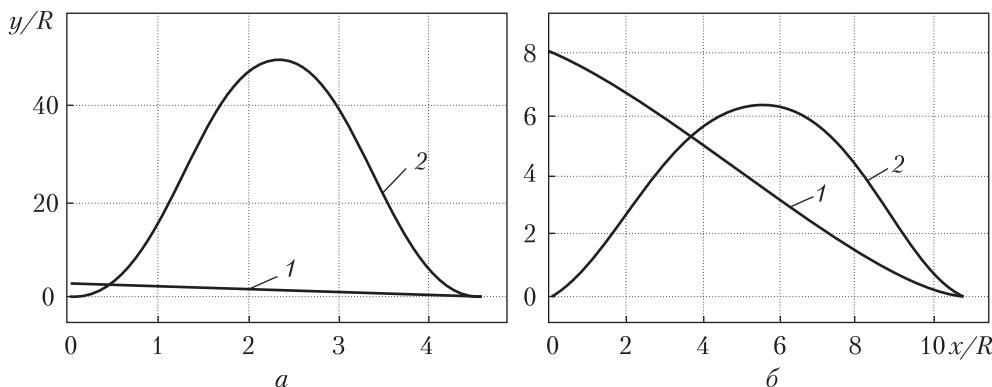


Рис. 3. Вигляд твірних циліндричних нанотрубок при довжині 1,609 (а) та 5,321 (б)

кришками графіки майже симетричні щодо середини оболонки, тобто на формі твірної майже не відображується той факт, що один її край не закріплений, вільний.

Суттєво по іншому втрачають стійкість нанотрубки з кришками при осьовому стиску. В цьому випадку осьове навантаження сконцентровано в околі полюсного отвору, радіус якого  $r_0$  визначається центральним кутом  $\phi_0$ . Радіус півсфери  $R = 0,61$  нм, довжина циліндричної частини дорівнює 2 нм з тим же радіусом. Зосереджене навантаження  $P = 2\pi r_0 T_0$ , де  $T_0$  – зусилля, що направлене вздовж осі  $x$ . Крайові умови при  $x = x_0 = R(1 - \cos \phi_0/2)$  визначаються як  $T_{11,0} = T_0 \sin \frac{\phi_0}{2}$  та  $T_{13,0} = T_0 \cos \frac{\phi_0}{2}$ ,  $T_{12,0} = 0, M_{11,0} = 0$ . На протилежному торці при  $x = L - 2x_0$  задаються умови жорсткого защемлення.

Розрахунки показали, що як сфера, так і півсфера без циліндричної частини втрачають стійкість при  $T_0 = 5,61 nPa/nm$ . Критичне значення осьового зусилля для вказаної циліндричної оболонки ( $\phi_0 = 0$ ) з одним вільним, а другим защемленим торцями дорівнює  $T_0 = 7,45 nPa/nm$ . Якщо оболонка складається з двох півсфер і циліндра, то  $T_0 = 5,1 nPa/nm$ . Різниця в критичних навантаженнях сфери та циліндра призводить до того, що при втраті стійкості нанотрубки з кришками відбувається локальне вигинання півсфер. Критичні навантаження півсфери та циліндра з півсферою відрізняються незначно.

Таким чином, авторами розроблено континуальну розрахункову модель нанотрубок у вигляді оболонок обертання, що дозволяє досліджувати їх стійкість при наявності кінцевих напівсферичних кришок і без них. Досліджено вплив кришок на критичні значення інтенсивності зовнішнього тиску для нанотрубок різної довжини при різних граничних умовах. Встановлено, що наявність напівсферичних кришок на кінцях нанотрубок відіграє позитивну роль, підвищуючи їх стійкість при зовнішньому тиску. Якщо нанотрубки дуже довгі, то вплив виду граничних умов, а також наявності на краях кришок на критичних навантаженнях не позначається.

Досліджено також стійкість сферичних (фуллеренів) та циліндричних оболонок (нанотрубок) з напівсферичними кришками при осьовому стиску зосередженими навантаженнями. Показано, що для сферичних і напівсферичних оболонок критичні значення навантажень збігаються. При стиску нанотрубок з кришками відбувається локальне вигинання півсфер при навантаженнях значно менших, ніж для окремого циліндра. Отримані результати можуть бути корисні в різних нанопристроях, зокрема, при використанні нанотрубок в якості зондів.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокомпозитов. Киев: Институт механики им. С.П. Тимошенко, 2010. 398 с.
- Elishakoff I., Pentaras D. et al. Carbon nanotubes and Nanosensors: Vibration, Buckling and Ballistic Impact. Wiley-ISTE, 2012. 448 p.
- Ru C.Q. Elastic buckling of singwalled carbon nanotubes ropes under hight pressure. *Phys. Review*. 2000. **62**. P. 10405–10408.
- Семенюк Н.П. К устойчивости двухслойных углеродных нанотрубок. *Прикл. механика*. 2016. **52**, № 1. С. 108–117.
- Shima H. Buckling of Carbon Nanotubes: A State of the Art Review. *Materials*. 2012. **5**. P. 47–84.
- Sears A., Batra B.C. Buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression. *Phys. review*. 2006. **B 73**. P. 1–11.
- Thostenton E.T., Li C., Chou T.-W. Nanocomposites in context (review). *Composites Science and Technology*. 2005. **65**. P. 491–516.
- Wang C.M., Zhang Y.Y., Xiang Y., Reddy J.N. Recent Studies on Buckling of Carbon Nanotubes. *Appl. Mech. Reviews*. 2010. **63**, № 3. P. 1–18.
- Wang C.M., Tay Z.Y., Chowdhuary A.H., Duan W.D., Zhang Y.Y., Silvestre N. Examination of cylindrical shells theories for buckling of carbon nanotubes. *Int. J. Struct. Stability and Dynamics*. 2011. **11**, № 6. P. 1035–1058.
- Yakobson B.I., Brabec C.J., Brabec J. Nanomechanics of carbon tubes instabilities beyond linear response. *Phys. Review Letters*. 1996. **76**. P. 2511–2514.
- Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. Київ: Каравела, 2010. 352 с.
- Ванин Г.Л., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. Київ: Наук. думка, 1987. 200 с.
- Lanczos C. The Variational Principles of Mechanics. Univ. of Toronto Press, 1964. 367 p.
- Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. Об устойчивости и закритическом поведении ортотропных цилиндрических оболочек с локальными прогибами. *Прикл. механика*. 2016. **52**, № 3. С. 92–104.

Надійшло до редакції 07.05.2018

## REFERENCES

- Guz, A. N., Rushchitsky, J. J. & Guz, I. A. (2010). Introduction in Mechanics of nanocomposites. Kiev: S.P. Timoshenko Institute of Mechanics (in Russian).
- Elishakoff, I. & Pentaras, D. et al. (2012). Carbon nanotubes and Nanosensors: Vibration, Buckling and Ballistic Impact. Wiley-ISTE.
- Ru, C. Q. (2000). Elastic buckling of singwalled carbon nanotubes ropes under hight pressure. Phis. Review, 62, pp. 10405-10408.
- Semenyuk, N. P. (2016). Stability of double-walled carbon nanotubes revisited. Int. Appl. Mech., 52, No. 1, pp. 73-81.
- Shima, H. (2012). Buckling of Carbon Nanotubes: A State of the Art Review. Materials, 5, pp. 47-84.
- Sears, A. & Batra, B. C. (2006). Buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression. Phis. Review, B 73, pp. 1-11.
- Thostenton, E. T., Li, C. & Chou, T.-W. (2005). Nanocomposites in context (review). Composites Science and Technology, 65, pp. 491-516.
- Wang, C. M., Zhang, Y. Y., Xiang, Y. & Reddy, J. N. (2010). Recent Studies on Buckling of Carbon Nanotubes. Appl. Mechanics Reviews, 63, No. 3, pp. 1-18.
- Wang, C. M., Tay, Z. Y., Chowdhuary, A. H., Duan, W. D., Zhang, Y. Y. & Silvestre, N. (2011). Examination of cylindrical shells theories for buckling of carbon nanotubes. Int. J. Struct. Stability and Dynamics, 11, No. 6, pp. 1035-1058.
- Yakobson, B. I., Brabec, C. J. & Brabec, J. (1996). Nanomechanics of carbon tubes instabilities beyond linear response. Phys. Review Letters, 76, pp. 2511-2514.

11. Bazhenov, V. A., Semenyuk, M. P. & Trach, V. M. (2010). Nonlinear deformation, stability and post-buckling behavior of anisotropic shells. Kiev: Caravela (in Ukrainian).
12. Vanin, G. A. & Semenyuk, N. P. (1987). Stability of shells made of composite materials with imperfections. Kiev: Naukova dumka (in Russian).
13. Lanczos, C. (1964). The Variational Principles of Mechanics. Univ. of Toronto Press.
14. Semenyuk, N. P. & Zhukova, N. B. (2016). Stability and Post-Buckling Behavior of Orthotropic Cylindrical Shells with Local Deflection. Int. Appl. Mech., 52, No. 3, pp. 290-300.

Received 07.05.2018

*Н.П. Семенюк<sup>1</sup>, В.М. Трач<sup>2</sup>, Н.Б. Жукова<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

<sup>2</sup> Национальный университет водного хозяйства и природопользования, Ровно

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

## К КОНТИНУАЛЬНОЙ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОСТИ НАНОТРУБОК С ПОЛУСФЕРИЧЕСКИМИ КРЫШКАМИ

Для исследования устойчивости углеродных нанотрубок предлагается континуальная расчетная модель, в основу которой положена нелинейная теория анизотропных оболочек среднего изгиба. Проведены расчеты критических состояний для нанотрубок с торцевыми полусферическими крышками и без них при различных граничных условиях и различных внешних нагрузках.

**Ключевые слова:** теория оболочек, устойчивость, углеродная нанотрубка, полусферические крышки, внешнее давление, осевое сжатие

*N.P. Semenyuk<sup>1</sup>, V.M. Trach<sup>2</sup>, N.B. Zhukova<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

<sup>2</sup> National University of Water and Environmental Engineering, Rivne

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

## TO A CONTINUAL CALCULATION MODEL OF STABILITY OF NANOTUBES WITH HEMISPHERICAL END CAPS

A continual calculation model is offered to study the stability of carbon nanotubes. It is based on the non-linear theory of anisotropic shells with medium curvature. The calculations of critical states for nanotubes with hemispherical end caps and without them under different boundary conditions and different external loads are carried out.

**Keywords:** theory of shells, stability, carbon nanotube, hemispherical end caps, external pressure, axial compression.

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovid2018.09.051>

УДК 539.3

**Л.П. Хорошун, О.И. Левчук**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: lkhoroshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

## **Эффективные упругие свойства стохастических однонаправленных волокнистых композитов при несовершенной адгезии**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л.П. Хорошуном*

*Рассмотрена задача об эффективных упругих свойствах стохастического однонаправленного волокнистого композита с несовершенными условиями контакта матрицы и цилиндрических волокон в виде наличия межфазных пористых слоев, которые рассматриваются как третий компонент. В основу положены стохастические двумерные уравнения упругости для материала с трансверсально-изотропными компонентами. Применяется подход, где трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному заменой волокон с межфазным слоем эффективными композитными волокнами с эквивалентными или эффективными модулями упругости. Исследованы зависимости эффективных модулей упругости от объемного содержания волокон и пористости межфазных слоев.*

**Ключевые слова:** однонаправленный волокнистый композит, стохастические уравнения, пористые межфазные слои, условия несовершенного контакта, эффективные упругие свойства.

Создание композитных материалов (КМ) с заданными механическими свойствами достигается выбором соответствующих компонентов, геометрических параметров структуры, а также осуществлением оптимального сцепления (адгезии) компонентов на границе их раздела. Идеальное сцепление или совершенный контакт описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений на межфазной границе. В действительности межфазная граница представляет собой не поверхность, а переходную зону [1–5] со свойствами, отличными от свойств компонентов. Это обусловлено наличием разрывов различной природы между компонентами, нанесением аппретов на включения для усиления химических связей с матрицей, наличием микропустот, связанных с особенностями технологии и эксплуатации КМ. Поэтому адекватная модель несовершенного контакта матрицы и включений сводится к наличию между ними межфазных слоев, рассматриваемых как третий компонент, который состоит из приповерхностных частей матрицы и включений, аппретов и дефектов в виде микропустот. На поверхностях раздела межфазных слоев с матрицей и включениями выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений [3–5].

В настоящей работе исследованы эффективные упругие свойства трехкомпонентного композитного материала стохастической структуры, состоящего из матрицы, однородных волокон и межфазных пористых слоев. Трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному путем замены волокон с межфазными слоями эффективными композитными волокнами с эквивалентными или эффективными упругими свойствами. Композитные волокна моделируются двухкомпонентным волокнистым матричным материалом, где волокна и матрица имеют упругие модули и объемные содержания соответственно реальных волокон и межфазных слоев. Построены кривые зависимостей эффективных упругих постоянных от объемного содержания волокон и пористости межфазных слоев.

**Исходные уравнения.** Рассмотрим композитный материал, образованный однородными хаотически расположенным трансверсально-изотропными волокнами, связанными в монолит некоторым изотропным связующим, представляющим матрицу [6]. Будем предполагать, что между волокнами и матрицей существует межфазный слой, свойства которого отличаются от свойств волокон и матрицы. При этом на поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и волокном выполняются условия совершенного контакта, обеспечивающие непрерывность перемещений и поверхностных напряжений. Вследствие хаотичности расположения волокон упругие модули будут случайными статистически однородными и изотропными функциями координат плоскости, нормальной к направлению волокон. Пусть волокна направлены вдоль оси  $x_3$ . Тогда зависимости между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\epsilon_{ij}$  в микроточке можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (2kV_{ijmn} + 2mD_{ijmn})\epsilon_{mn} + \lambda_{13}\epsilon_{33}\delta_{ij}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_{13}\epsilon_{rr} + \lambda_{33}\epsilon_{33}, \quad \sigma_{i3} = 2\mu\epsilon_{i3} \quad (i, j, m, n, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (1)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} 2k &= \lambda_{11} + \lambda_{12}, \quad 2m = \lambda_{11} - \lambda_{12}, \quad 2\mu = \lambda_{44}, \quad V_{ijmn} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{mn}, \\ D_{ijmn} &= \frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{ij}\delta_{mn} \quad (i, j, m, n = 1, 2), \end{aligned} \quad (2)$$

причем  $\lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{13}, \lambda_{33}, \lambda_{44}$  — модули упругости, являющиеся случайными функциями координат  $x_1, x_2$  [7]. Объемные содержания и модули упругости волокон и матрицы обозначим соответственно  $c_k, \lambda_{11k}, \lambda_{12k}, \lambda_{13k}, \lambda_{33k}, \lambda_{44k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ).

Если композитный материал находится в условиях однородных нагрузок, то напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\epsilon_{ij}$  также будут статистически однородными случайными функциями координат  $x_1, x_2$ . Представим напряжения  $\sigma_{ij}$ , деформации  $\epsilon_{ij}$  и перемещения  $u_i$  в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0, \quad \epsilon_{ij} = \langle \epsilon_{ij} \rangle + \epsilon_{ij}^0, \quad u_i = \langle u_i \rangle x_j + u_i^0. \quad (3)$$

Тогда, подставляя (1), (3) в уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (4)$$

и учитывая соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (5)$$

приходим к уравнениям равновесия относительно флукутаций перемещений

$$\begin{aligned} m_c u_{i,rr}^0 + k_c u_{r,ri}^0 &= -[(k' - m')\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + 2m'\varepsilon_{ij} + \lambda_{13}\langle\varepsilon_{33}\rangle\delta_{ij}],_j, \\ \mu_c u_{3,rr}^0 &= -2(\mu'\varepsilon_{3j}),_j \quad (i, j, r = 1, 2), \\ (k' &= k - k_c, \quad m' = m - m_c, \quad \mu' = \mu - \mu_c), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $k_c, m_c, \mu_c$  — упругие постоянные однородного тела сравнения [6].

Воспользуемся функциями Грина, удовлетворяющими уравнениям

$$\begin{aligned} m_c G_{ij,rr}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + k_c G_{ir,rj}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + \delta(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})\delta_{ij} &= 0, \\ \mu_c G_{,rr}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + \delta(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})\delta_{ij} &= 0 \quad (i, j, r, p = 1, 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда на основе теоремы взаимности Бетти из уравнений (6), (7) следует

$$\begin{aligned} u_i^{0(1)} &= \int_{D^{(2)}} G_{i\alpha}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})[(k'^{(2)} - m'^{(2)})\varepsilon_{rr}^{(2)}\delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)}\langle\varepsilon_{33}\rangle\delta_{\alpha\beta}],_\beta dD^{(2)}, \\ u_3^{0(1)} &= 2 \int_{D^{(2)}} G(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) (\mu'^{(2)}\varepsilon_{3\beta}^{(2)}),_\beta dD^{(2)} \quad (i, \alpha, \beta, p, r = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь индексы в круглых скобках вверху обозначают точку плоскости.

Подставляя (3), (8) в (5), получим интегральные уравнения относительно деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(1)} &= \langle\varepsilon_{ij}\rangle + \int_{D^{(2)}} G_{(i\alpha, j)\beta}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})[(k'^{(2)} - m'^{(2)})\varepsilon_{rr}^{(2)}\delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)}\langle\varepsilon_{33}\rangle\delta_{\alpha\beta}]dD^{(2)} + \\ &+ \int_{S^{(2)}} G_{(i\alpha, j)\beta}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})[(k'^{(2)} - m'^{(2)})\varepsilon_{rr}^{(2)}\delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)}\langle\varepsilon_{33}\rangle\delta_{\alpha\beta}]n_\beta^{(2)}dS^{(2)}, \\ \varepsilon_{3j}^{(1)} &= \langle\varepsilon_{3j}\rangle + \int_{D^{(2)}} G_{,j\beta}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})\mu'^{(2)}\varepsilon_{3\beta}^{(2)}dD^{(2)} + \int_{S^{(2)}} G_{,j}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})\mu'^{(2)}\varepsilon_{3\beta}^{(2)}n_\beta^{(2)}dS^{(2)}, \\ (i, j, \alpha, \beta &= 1, 2), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $n_q$  — направляющие косинусы нормали к криволинейной бесконечно удаленной границе  $S$  области  $D$ .

Функции Грина, удовлетворяющие уравнениям (7), определяются формулами

$$\begin{aligned} G_{ij}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) &= \frac{1}{4\pi m_c(k_c + m_c)} \left[ (k_c + 2m_c) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + k_c \frac{(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})}{r^2} \right], \\ G_{ij}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi\mu_c} \ln \frac{1}{r}, \quad r^2 = (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})(x_k^{(1)} - x_k^{(2)}) \quad (i, j, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Представим систему интегральных уравнений (9) в символической форме

$$\varepsilon^{(1)} = \langle \varepsilon \rangle + K(x^{(1)} - x^{(2)}) \lambda' \varepsilon^{(2)} \quad (11)$$

и умножим (11) на условную плотность  $f(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \lambda^{(2)}|_{\nu}^{(1)})$  (плотность распределения деформаций в точках  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  и модулей упругости в точке  $x^{(2)}$  при условии, что точка  $x^{(1)}$  находится в  $\nu$ -компоненте) и проведем статистическое усреднение. Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, приходим к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \sum_{k=1}^N K(x) p_{\nu k}(x) \lambda'_k \langle \varepsilon^k \rangle \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (12)$$

где  $p_{\nu k}(x^{(1)} - x^{(2)})$  — вероятность перехода из  $\nu$ -компонента в точке  $x^{(1)}$  в  $k$ -компонент в точке  $x^{(2)}$ , которая удовлетворяет условиям

$$c_k p_{\nu k} = c_{\nu} p_{\nu k}(x), \quad \sum_{k=1}^N p_{\nu k}(x) = 1, \quad p_{\nu k}(0) = \delta_{\nu k}, \quad p_{\nu k}(\infty) = c_k, \quad (13)$$

где  $c_k$  — объемное содержание  $k$ -компонента.

Если свойства композитного материала статистически изотропны в плоскости, перпендикулярной направлению волокон, то условные вероятности  $p_{\nu k}(x^{(1)} - x^{(2)})$  зависят только от расстояния между точками  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$ . В этом случае после интегрирования в (12) получим

$$\langle \varepsilon^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon \rangle + A \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) \lambda'_k \langle \varepsilon^k \rangle \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (14)$$

или в индексной форме

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle + A_{ijpq} \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) [(k'_k - m'_k) \langle \varepsilon_{rr}^k \rangle \delta_{pq} + 2m'_k \varepsilon_{pq}^k + \lambda_{13k}^k \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{pq}], \\ \langle \varepsilon_{i3}^{\nu} \rangle &= \langle \varepsilon_{i3} \rangle + A_{3i3q} \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) \mu'^k \langle \varepsilon_{q3} \rangle \quad (i, j, p, q, r = 1, 2, \quad \nu = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (15)$$

где ненулевые компоненты  $A_{ijpq}$  определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{1111} = A_{2222} &= -\frac{k_c + 4m_c}{8m_c(k_c + m_c)}, \quad A_{1122} = A_{2211} = \frac{k_c}{8m_c(k_c - m_c)}, \\ A_{1212} = A_{2121} = A_{1221} = A_{2112} &= -\frac{k_c + 2m_c}{8m_c(k_c + m_c)}, \\ A_{1313} = A_{2323} = A_{3131} = A_{3232} = A_{1331} = A_{2332} = A_{3113} = A_{3223} &= -\frac{1}{4\mu_c}. \end{aligned} \quad (16)$$

**Эффективные упругие постоянные.** Решение системы уравнений (15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle &= \left( \frac{1}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} V_{ijpq} + \frac{1}{m_v + \bar{m}} \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle - \\ &- \frac{1}{2(k_v + \bar{k})} \left( \lambda_{13}^v - \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}, \\ \langle \varepsilon_{33}^v \rangle &= \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle = \frac{1}{\mu_v + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu_v + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, p, q = 1, 2), \end{aligned} \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \bar{k} &= m_c, \quad \bar{m} = \frac{k_c m_c}{k_c + 2m_c}, \quad \bar{\mu} = \mu_c, \quad \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1}, \\ \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} &= \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k + \bar{m}} \right)^{-1}, \quad \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle = \sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}^1}{k_k + \bar{k}}, \quad \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив (17) в (1), получим выражения средних напряжений  $v$ -компоненты через макро-деформации

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^v \rangle &= 2(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{33}^v \rangle = \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2\mu_v^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle, \\ k_v^* &= \frac{k_v}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1}, \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}} \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1}, \quad \lambda_{13v}^* = \frac{\lambda_{13}^v}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1}, \\ \lambda_{33v}^* &= \lambda_{33}^v + \frac{\lambda_{13}^v}{k_v + \bar{k}} \left( \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle - \frac{\lambda_{13}^v}{k_v + \bar{k}} \right) \\ \mu_v^* &= \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu_v + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \quad (i, j, p, q, r = 1, 2, \quad v = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (19)$$

Осреднив выражения (19), приходим к соотношениям упругости для макрообъема волокнистого материала

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= 2(k^* V_{ijpq} + m^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}, \quad \langle \sigma_{33} \rangle = \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \\ \langle \sigma_{i3} \rangle &= 2\mu^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2), \end{aligned} \quad (20)$$

где эффективные модули упругости определяются формулами

$$k^* = \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{k}{k + \bar{k}} \right\rangle = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k k_k}{k_k + \bar{k}} \right),$$

$$\begin{aligned}
m^* &= \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{m}{m + \bar{m}} \right\rangle = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k + \bar{m}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k m_k}{m_k + \bar{m}} \right), \\
\lambda_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}}{k_k + \bar{k}} \right), \\
\lambda_{33}^* &= \langle \lambda_{33} \rangle + \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{(\lambda_{13})^2}{k_v + \bar{k}} \right\rangle = \\
&= \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}}{k_k + \bar{k}} \right)^2 + \sum_{k=1}^N c_k \left( \lambda_{33k} - \frac{\lambda_{13k}^2}{k_k + \bar{k}} \right), \\
\mu^* &= \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\mu}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k \mu_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right). \tag{21}
\end{aligned}$$

В случае двухкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ выражения эффективных модулей упругости (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
k^* &= \langle k \rangle - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2)^2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}, \quad m^* = \langle m \rangle - \frac{c_1 c_2 (m_1 - m_2)^2}{c_1 m_2 + c_2 m_1 + \bar{m}}, \\
\lambda_{13}^* &= \langle \lambda_{13} \rangle - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2)(\lambda_{131} - \lambda_{132})}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}, \quad \lambda_{33}^* = \langle \lambda_{33} \rangle - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{131} - \lambda_{132})^2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}, \\
\mu^* &= \langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}}, \tag{22}
\end{aligned}$$

где индексы 1, 2 относятся соответственно к волокнам и матрице.

В решение задачи (17) – (21) наряду с модулями упругостями и объемными содержаниями компонентов, являющимися вполне определенными параметрами, входят постоянные тела сравнения  $k_c$ ,  $m_c$ ,  $\mu_c$ , которые определяются неоднозначным выбором тела сравнения. Поэтому возникает вопрос о корректном выборе постоянных упругости тела сравнения. При формальном решении статистически нелинейной задачи об эффективных упругих свойствах КМ стохастической структуры упругие постоянные тела сравнения обычно выбираются в виде математических ожиданий упругих модулей или податливостей, хотя при этом не исключаются и другие варианты. Однако здесь корректность выбора тела сравнения зависит непосредственно от связности компонентов, что особенно наглядно проявляется для двухкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ. В самом деле, здесь физический смысл имеет выбор

$$k_c = \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2} \right)^{-1}, \quad m_c = \left\langle \frac{1}{m} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^{-1}, \quad \mu_c = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}. \tag{23}$$

если жесткость волокон выше жесткости матрицы, и

$$k_c = \langle k \rangle = c_1 k_1 + c_2 k_2, \quad m_c = \langle m \rangle = c_1 m_1 + c_2 m_2, \quad \mu_c = \langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, \quad (24)$$

если жесткость матрицы выше жесткости волокон. Из (22)–(24) соответственно следуют формулы для КМ с бесконечно жесткими волокнами и с нулевой жесткостью волокон, т.е. с цилиндрическими порами.

В случае многокомпонентного КМ выбор тела сравнения не имеет такой наглядности как для двухкомпонентного КМ, т.е. задача значительно усложняется.

**Эффективные модули упругости трехкомпонентного КМ.** Проблематичность корректного выбора постоянных тела сравнения  $k_c, m_c, \mu_c$  для многокомпонентного КМ затрудняет применение соотношений (21) для определения эффективных упругих постоянных трехкомпонентного однородного волокнистого КМ, состоящего из матрицы, волокон и межфазных слоев между ними. В связи с этим по аналогии с [4] воспользуемся подходом, в котором трехкомпонентный КМ сводится к двухкомпонентному путем замены волокон с межфазными слоями эффективными композитными волокнами с эквивалентными или эффективными свойствами. Волокна с межфазными слоями моделируем двухкомпонентным матричным материалом волокнистой структуры, где волокна и матрица имеют упругие модули и объемные содержания такие же как реальные волокна и межфазные слои. Основанием для этого является зависимость эффективных упругих постоянных (21), (22) только от объемных содержаний компонентов, другие геометрические параметры структуры эти выражения не содержат.

Обозначим объемные содержания и модули упругости волокон, матрицы и межфазных слоев соответственно,  $c_k, k_k, m_k, \lambda_{13k}, \lambda_{33k}, \mu_k$  ( $k=1, 2, 3$ ), а объемное содержание и эффективные модули упругости композитных волокон на основе реальных волокон межфазных слоев —  $c_4 = c_1 + c_3, k_4, m_4, \lambda_{134}, \lambda_{334}, \mu_4$ . Тогда, согласно (19), получим выражения средних напряжений компонентов 1 и 3 через средние деформации  $\langle \varepsilon_{ij}^4 \rangle$  композитных волокон

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = 2(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq}^4 \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{33}^4 \rangle,$$

$$\langle \sigma_{33}^v \rangle = \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{rr}^4 \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \varepsilon_{33}^4 \rangle, \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2\mu_v^* \langle \varepsilon_{i3}^4 \rangle, \quad (i, j, r, p, q = 1, 2, v = 1, 3),$$

$$k_v^* = \frac{k_v}{k_v + \bar{k}_{13}} \left( \frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1}, \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}_{13}} \left( \frac{s_1}{m_1 + \bar{m}_{13}} + \frac{s_3}{m_3 + \bar{m}_{13}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{13v}^* = \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{13}} \left( \frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1}, \quad \mu_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}_{13}} \left( \frac{s_1}{\mu_1 + \bar{\mu}_{13}} + \frac{s_3}{\mu_3 + \bar{\mu}_{13}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{33v}^* = \lambda_{33v}^v + \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{13}} \left[ \left( \frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1} \left( \frac{s_1 \lambda_{131}}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3 \lambda_{133}}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right) - \lambda_{13v} \right],$$

$$s_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_3}, \quad s_3 = \frac{c_3}{c_1 + c_3},$$

$$\bar{k}_{13}^* = m_{13}^c, \quad \bar{m}_{13} = \frac{k_{13}^c m_{13}^c}{k_{13}^c + 2m_{13}^c}, \quad \bar{\mu}_{13}^* = \mu_{13}^c, \quad k_{13}^c = \begin{cases} s_1 k_1 + s_3 k_3, & k_3 \geq k_1; \\ \left( \frac{s_1}{k_1} + \frac{s_3}{k_3} \right)^{-1}, & k_3 \leq k_1; \end{cases}$$

$$m_{13}^c = \begin{cases} s_1 m_1 + s_3 m_3, & m_3 \geq m_1, \\ \left( \frac{s_1}{m_1} + \frac{s_3}{m_3} \right)^{-1}, & m_3 \leq m_1, \end{cases} \quad \mu_{13}^c = \begin{cases} s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3, & \mu_3 \geq \mu_1, \\ \left( \frac{s_1}{\mu_1} + \frac{s_3}{\mu_3} \right)^{-1}, & \mu_3 \leq \mu_1. \end{cases} \quad (25)$$

На основе (25) находим зависимости между средними по композитным волокнам напряжениями и деформациями

$$\langle \sigma_{ij}^4 \rangle = 2(k_4 V_{ijpq} + m_4 D_{ijpq}) \langle \epsilon_{pq}^4 \rangle + \lambda_{134} \langle \epsilon_{33}^4 \rangle \delta_{ij},$$

$$\langle \sigma_{33}^4 \rangle = \lambda_{134} \langle \epsilon_{rr}^4 \rangle + \lambda_{334} \langle \epsilon_{33}^4 \rangle, \quad \langle \sigma_{i3}^4 \rangle = 2\mu_4 \langle \epsilon_{i3}^4 \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2), \quad (26)$$

где эффективные упругие модули определяются формулами

$$k_4 = s_1 k_1^* + s_3 k_3^*, \quad m_4 = s_1 m_1^* + s_3 m_3^*, \quad \lambda_{134} = s_1 \lambda_{131}^* + s_3 \lambda_{133}^*,$$

$$\lambda_{334} = s_1 \lambda_{331}^* + s_3 \lambda_{333}^*, \quad \mu_4 = s_1 \mu_1^* + s_3 \mu_3^*. \quad (27)$$

Согласно применяемому подходу эффективные постоянные упругости трехкомпонентного КМ, образованного матрицей, волокнами и межфазными слоями, определяются как эффективные постоянные упругости двухкомпонентного КМ, образованного матрицей и композитными волокнами, имеющими объемные содержания и модули упругости соответственно  $c_2, c_2, k_2, m_2, \lambda_{132}, \lambda_{332}, \mu_2$  и  $c_4 = c_1 + c_3, k_4, m_4, \lambda_{134}, \lambda_{334}, \mu_4$ . Тогда, согласно (19), находим выражения средних напряжений по компонентам 2 и 4 через макродеформации  $\langle \epsilon_{ij} \rangle$  трехкомпонентного КМ

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = 2(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq}) \langle \epsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \epsilon_{33} \rangle,$$

$$\langle \sigma_{33}^v \rangle = \lambda_{13v}^* \langle \epsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \epsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2\mu_v^* \langle \epsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2, \quad v = 2, 4),$$

$$k_v^* = \frac{k_v}{k_v + \bar{k}_{24}} \left( \frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1}, \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}_{24}} \left( \frac{c_2}{m_2 + \bar{m}_{24}} + \frac{c_4}{m_4 + \bar{m}_{24}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{13v}^* = \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{24}} \left( \frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1}, \quad \mu_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}_{24}} \left( \frac{c_2}{\mu_2 + \bar{\mu}_{24}} + \frac{c_4}{\mu_4 + \bar{\mu}_{24}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{33v}^* = \lambda_{33v} + \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{24}} \left[ \left( \frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1} \left( \frac{c_2 \lambda_{132}}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4 \lambda_{134}}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right) - \lambda_{13v} \right],$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{24} &= m_{24}^c, \quad \bar{m}_{24} = \frac{k_{24}^c m_{24}^c}{k_{24}^c + 2m_{24}^c}, \quad \bar{\mu}_{24} = \mu_{24}^c, \quad k_{24}^c = \begin{cases} c_2 k_2 + c_4 k_4, & k_4 \geq k_2, \\ \left( \frac{c_2}{k_2} + \frac{c_4}{k_4} \right)^{-1}, & k_4 \leq k_2, \end{cases} \\ m_{24}^c &= \begin{cases} c_2 m_2 + c_4 m_4, & m_4 \geq m_2, \\ \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_4}{m_4} \right)^{-1}, & m_4 \leq m_2, \end{cases} \quad \mu_{24}^c = \begin{cases} c_2 \mu_2 + c_4 \mu_4, & \mu_4 \geq \mu_2, \\ \left( \frac{c_2}{\mu_2} + \frac{c_4}{\mu_4} \right)^{-1}, & \mu_4 \leq \mu_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда следуют зависимости между макронапряжениями и макродеформациями трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ

$$\begin{aligned} \langle \delta_{ij} \rangle &= 2(k^* V_{ijpq} + m^* D_{ijpq}) \langle \epsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \epsilon_{33} \rangle \delta_{ij}, \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \epsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \epsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\mu^* \langle \epsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2), \end{aligned} \quad (29)$$

где эффективные модули упругости определяются формулами

$$\begin{aligned} k^* &= c_2 k_2^* + c_4 k_4^*, \quad m^* = c_2 m_2^* + c_4 m_4^*, \quad \lambda_{13}^* = c_2 \lambda_{132}^* + c_4 \lambda_{134}^*, \\ \lambda_{33}^* &= c_2 \lambda_{332}^* + c_4 \lambda_{334}^*, \quad \mu^* = c_2 \mu_2^* + c_4 \mu_4^*. \end{aligned} \quad (30)$$

Объемные содержания волокон, матрицы и межфазных слоев  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  вычисляются по формулам

$$c_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad c_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad c_3 = \frac{v_3}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad (31)$$

где  $v_1, v_2, v_3$  — объемы соответственно волокон, матрицы и межфазных слоев в некотором макрообъеме КМ. Если макрообъем содержит  $n$  цилиндрических волокон радиуса  $r_0$ , а толщина межфазного слоя равна  $h$ , то будем иметь

$$v_1 = \pi n l r_0^2, \quad v_3 = 2\pi n l h r_0. \quad (32)$$

Здесь  $l$  — длина волокна в макрообъеме. Из (31), (32) следует зависимость

$$c_3 = 2 \frac{h}{r_0} c_1. \quad (33)$$

В изложенных выше результатах по определению эффективных модулей упругости и средних по компонентам напряжений трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ предполагаются заданными объемные содержания и модули упругости трансверсально-изотропных волокон, матрицы и межфазных слоев. Как частный случай отсюда следуют варианты с изотропными свойствами компонентов. Наличие в межфазных слоях дефектов меняет их упругие свойства. Если дефекты моделировать микропорами, а материал

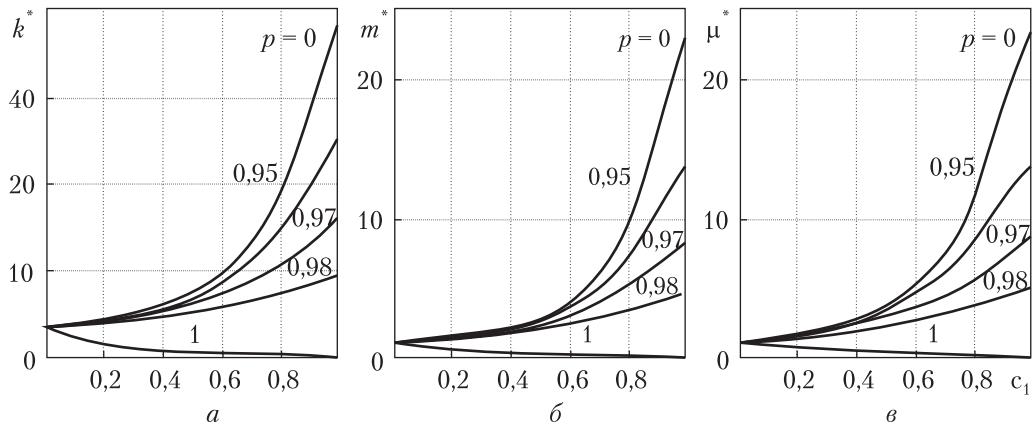


Рис. 1

каркаса пористых межфазных слоев принять изотропным, то эффективные модули объемного сжатия  $K_3$  и сдвига  $\mu_3$  межфазных пористых слоев определяются формулами [5]

$$K_3 = \frac{4K_0\mu_0 + (1-p)^2}{4\mu_0 + (3K_0 - 4\mu_0)p}, \quad \mu_3 = \frac{\mu_0(9K_0 + 8\mu_0)(1-p)^2}{9K_0 + 8\mu_0 - (3K_0 - 4\mu_0)p}, \quad (34)$$

где  $K_0$ ,  $\mu_0$  — соответственно модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса;  $p$  — пористость.

**Численные результаты.** На основе приведенных соотношений проведено численное исследование влияние несовершенных условий контакта компонентов на эффективные упругие свойства стохастического КМ на основе однородных волокон из алюмоборосиликатного стекла и матрицы из отверженного эпоксидного связующего, которые имеют упругие модули объемного сжатия и сдвига соответственно [8]:

$$K_c = 33,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_c = 25 \text{ ГПа}; \quad K_s = 33,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_s = 1,111 \text{ ГПа}. \quad (35)$$

Несовершенные условия контакта волокон и матрицы принимаем в виде наличия межфазных пористых слоев между волокнами и матрицей, которые рассматриваются как третий компонент КМ. Аппретирующее покрытие волокон рекомендуется [1] применять с модулями упругости, промежуточными между модулями волокон и матрицы, что обеспечивает равномерную передачу усилий. Поэтому в безразмерных единицах, представляющих отношения соответствующих модулей к модулю сдвига эпоксидной матрицы  $\mu_s$ , согласно (34), (35), принимаем следующие значения:

$$K_1 = 30; \quad \mu_1 = 22,5; \quad K_2 = 3; \quad \mu_2 = 1; \quad K_0 = 16,5; \quad \mu_0 = 11,75. \quad (36)$$

Объемное содержание третьего компонента с модулями упругости (34) определяется формулой (33), где отношение толщины межфазного слоя  $h$  к радиусу цилиндрического волокна принято равным 0,01.

На рис. 1 и 2 приведены зависимости эффективных модулей упругости  $k^*$ ,  $m^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ , входящих в (29), от объемного содержания волокон  $c_1$  при заданных пористостях  $p$  межфазных слоев. Здесь объемное содержание волокон  $c_1$  находится в допустимом интер-

вале  $0 \leq c_1 \leq 0,98$  согласно (33). На рис. 3 даны зависимости эффективных поперечного  $v_{21}^*$  и продольного  $v_{31}^*$  коэффициентов Пуассона от объемного содержания волокон  $c_1$ , вычисленных по формулам

$$\begin{aligned} v_{21}^* &= \frac{(k^* - m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}, \\ v_{31}^* &= \frac{2m^*\lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Как видим, увеличение пористости  $p$  межфазных слоев эквивалентно уменьшению адгезии и ведет к уменьшению эффективных модулей упругости  $k^*$ ,  $m^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ , что вполне соответствует физическим представлениям. Однако монотонное увеличение модулей  $k^*$ ,  $m^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$  с ростом объемного содержания  $c_1$  волокон сохраняется при росте пористости  $p$  лишь до определенных соответственно значений  $p_1 = 0,989158$ ;  $p_2 = p_3 = 0,991435$ ;  $p_4 = 0,98507$ , после чего модули

уменьшаются с ростом объемного содержания  $c_1$  волокон. Исключение представляет лишь модуль  $\lambda_{33}^*$ , который увеличивается с ростом объемного содержания  $c_1$  волокон при произвольных значениях пористости  $p$  межфазных слоев.

Кривые зависимостей эффективных коэффициентов Пуассона  $v_{21}^*$ ,  $v_{31}^*$  от объемного содержания  $c_1$  волокон имеют немонотонный характер. При этом с ростом пористости  $p$  межфазных слоев коэффициент  $v_{31}^*$  убывает для всех значений объемного содержания  $c_1$  волокон, в то время как коэффициент  $v_{21}^*$  растет в диапазоне  $0 \leq p \leq 0,99$ , затем убывает, имея более сложный характер зависимости от  $c_1$ .

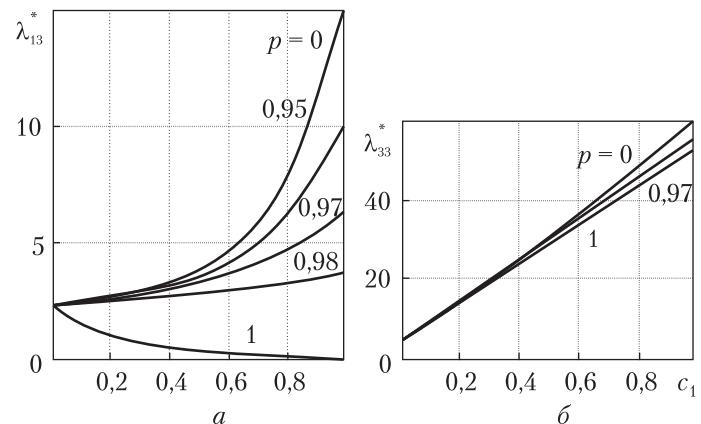


Рис. 2

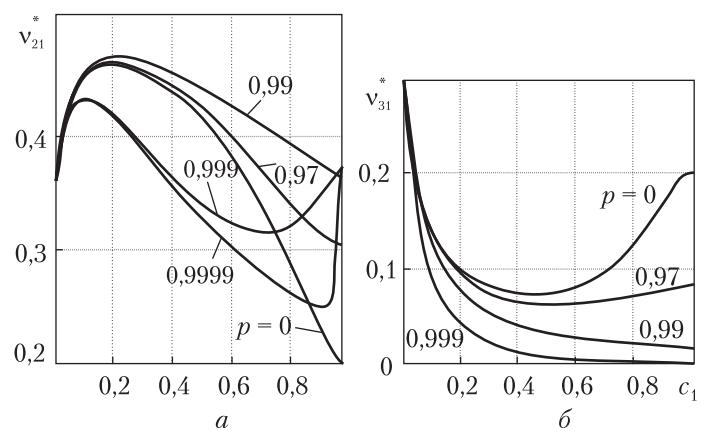


Рис. 3

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Современные композиционные материалы: Браутман Л. и Крок Р. (ред.). Москва: Мир. 1970. 672 с.
- Achenbach J.D., Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids.* 1989. **37**. P. 381–393.
- Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.* 2001. **33**. P. 309-323.
- Hashin Z. Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids.* 2002. **50**. P. 2509–2537.

5. Khoroshun L.P. Effective Elastic Properties of Stochastic Granular Composites with Interfacial Defects. *Int. Appl. Mech.* 2017. **52**, № 5. P. 574–587.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. Москва: Наука, 1977, 400 с.
7. Khoroshun L.P. Statistical theory of deformation of unidirectional fibrous materials. *Int. Appl. Mech.* 1968. **4**, № 7. P. 5–9.
8. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов. *Механика композит. материалов.* 1988. № 3. С. 433–441.

Поступило в редакцию 26.04.2018

## REFERENCES

1. Brautman, L. & Krok, P. (Eds.) (1970). Modern composite materials, Moscow: Mir (in Russian).
2. Achenbach, J. D. & Zhu, H. (1989). Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids.*, 37, pp. 381–393.
3. Benveniste, Y. & Miloh, T. (2001). Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.*, 33, pp. 309–323.
4. Hashin, Z. (2002). Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 50, pp. 2509–2537.
5. Khoroshun, L. P. (2017). Effective Elastic Properties of Stochastic Granular Composites with Interfacial Defects. *Int. Appl. Mech.*, 52, No.5, pp. 574–587.
6. Shermergor, T. D. (1977). Elasticity theory of micrononhomogenous mediums. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Khoroshun, L. P. (1968). Statistical theory of deformation of unidirectional fibrous materials. *Int. Appl. Mech.*, 4, No. 7, pp. 5-9.
8. Kregers, A. F. (1988). Mathematical modeling of thermal expansion of spatially reinforced composites. *Mechanics of Composite Materials*, No. 3, pp. 433–441 (In Russian).

Received 26.04.2018

Л.П. Хорошун, О.І. Левчук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: lkhoroshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

## ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ОДНОСПРАМОВАНИХ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ ПРИ НЕДОСКОНАЛІЙ АДГЕЗІЇ

Розглянуто задачу про ефективні пружні властивості стохастичного односпрямованого волокнистого композиту з недосконалими умовами контакту матриці і циліндричних волокон у вигляді наявності міжфазних пористих шарів, які розглядаються як третій компонент. В основу покладено стохастичні двовимірні рівняння пружності для матеріалу з трансверсально-ізотропними компонентами. Застосовано підхід, де трикомпонентний матеріал зводиться до двокомпонентного заміною волокон з міжфазним шаром ефективними композитними волокнами з еквівалентними чи ефективними модулями пружності. Досліджено залежність ефективних модулів пружності від об'ємного вмісту волокон і пористості міжфазних шарів.

**Ключові слова:** односпрямований волокнистий композит, стохастичні рівняння, пористі міжфазні шари, умови недосконалого контакту, ефективні пружні властивості.

L.P. Khoroshun, O.I. Levchuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: lkhoroshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES  
OF STOCHASTIC UNIDIRECTIONAL FIBROUS  
COMPOSITES UNDER IMPERFECT ADHESION

A problem of effective elastic properties of a stochastic unidirectional fibrous composite is considered. The interface conditions are assumed in the form of the presence of porous interphase layers between the matrix and cylindrical fibers, which are accepted as the third component. An approach, in which the three-component material is reduced to a two-component one, by replacing the fiber with the interphase layer by a composite fiber with equivalent or effective properties, is used. A dependence of the effective moduli on the volume fractions of fibers and the porosity of interphase layers is investigated.

**Keywords:** *unidirectional fibrous composite, stochastic equations, porous interphase layers, imperfect interphase conditions, effective elastic properties.*

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.064>

УДК 537.611.2:537.624(045)

**Г.Ю. Лаванов**

Национальный авиационный университет, Киев  
E-mail: Lavanovgennady@gmail.com

## **Двойной метамагнитный фазовый переход в изинговском антиферромагнетике с легкоплоскостной одноионной анизотропией и со спином ионов $S = 1$**

*Представлено академиком НАН Украины В.М. Локтевым*

*Показано, что в изинговском АФМ со спином ионов  $S = 1$  магнитное поле при  $T \neq 0$  может индуцировать двойной метамагнитный переход в виде последовательности двух квантовых магнитных фазовых переходов первого рода (QPT I) с плато в намагничивании между этими переходами. При этом переход из антиферромагнитной фазы в ферромагнитную происходит через промежуточное состояние, в котором спин подрешетки, исходно намагниченный против магнитного поля, находится в ван-флековском парамагнитном состоянии.*

**Ключевые слова:** энтропия, антиферромагнетик, парамагнетик, фазовые переходы.

Исследованию магнитных свойств сильно анизотропных магнетиков уделяется большое внимание [1–3]. В них при низких температурах могут наблюдаться магнитные квантовые фазовые переходы (QPT) [2–6]. Для антиферромагнетиков такие переходы могут быть, как показано в [7], подобными метамагнитным фазовым переходам с плато в намагничивании.

Идеология QPT появилась после пионерской работы Герца [8], которая дала возможность классифицировать их как отдельный вид фазовых переходов. Одной из причин, приводящей к QPT, являются квантовые флуктуации, неизбежно следующие из принципа неопределенности Гейзенберга. В изинговской системе спинов к QPT [9] могут приводить квантовые флуктуации, связанные с конкурирующими одноионной анизотропией легкоплоскостного типа и обменными взаимодействиями.

Различают два вида QPT: первого рода, со скачкообразным изменением параметра порядка [9] и второго рода, при котором происходит непрерывное изменение параметра порядка [10].

Особый интерес вызывает QPT первого рода, реализующийся при  $T \neq 0$ , когда несмотря на конечную температуру и приложенное внешнее поле ( $h$ ) намагничивание имеет ступенчатый характер с образованием “плато” [7], в интервале полей существования которого намагниченность слабо зависит от поля.

Целью этой работы является описание магнитных квантовых фазовых переходов при  $T \neq 0$  в изинговском АФМ с положительной константой одноионной анизотропии ( $D > 0$ ) и со спином ионов  $S = 1$ . Будет показано, что в изинговском двухподрешеточном АФМ возможен двойной метамагнитный фазовый переход. В классических антиферромагнетиках неелевского типа двойной метамагнитный переход возможен, если количество подрешеток больше, чем две [11].

Рассмотрим гамильтониан системы:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{m}_\beta} I_{\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{m}_\beta} S_{\mathbf{n}_\alpha}^z S_{\mathbf{m}_\beta}^z + D \sum_{\mathbf{n}_\alpha} (S_{\mathbf{n}_\alpha}^z)^2 - h \sum_{\mathbf{n}_\alpha} S_{\mathbf{n}_\alpha}^z, \quad (1)$$

где положение между магнитными ионами задается векторами  $\mathbf{n}_\alpha$  и  $\mathbf{m}_\beta$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – нумеруют магнитные подрешетки;  $S^z$  – оператор проекции спина. В (1) константы гамильтониана и магнитное поле заданы в энергетических единицах.

Ограничимся рассмотрением взаимодействия ближайших соседей. Тогда, обозначив константу межподрешеточного взаимодействия ( $\alpha \neq \beta$ ) через  $I_1 > 0$ , а внутриподрешеточного ( $\alpha = \beta$ ) –  $I_2$  (ее вклад в свободную энергию будем брать со знаком “минус”). При этом величина  $I_2$  по модулю должна оставаться значительно меньшей  $I_1$ , чтобы не нарушалось приближение двухподрешеточной модели. Константы взаимодействия  $I_1$  и  $I_2$  могут быть выражены с учетом ближайших соседей посредством соотношений:  $I_1 = z_{\alpha\alpha} I_{\mathbf{n}_\alpha \mathbf{m}_\alpha}$ , где  $z_{\alpha\alpha}$  – число ближайших соседей внутри подрешетки, а  $I_2 = z_{\mathbf{n}_\alpha \mathbf{m}_\beta} I_{\mathbf{n}_\alpha \mathbf{m}_\beta}$ , где  $z_{\mathbf{n}_\alpha \mathbf{m}_\beta}$  – число ближайших соседей другой подрешетки.

При  $T = 0$  энергия основного состояния АФМ может быть записана в виде [9]:

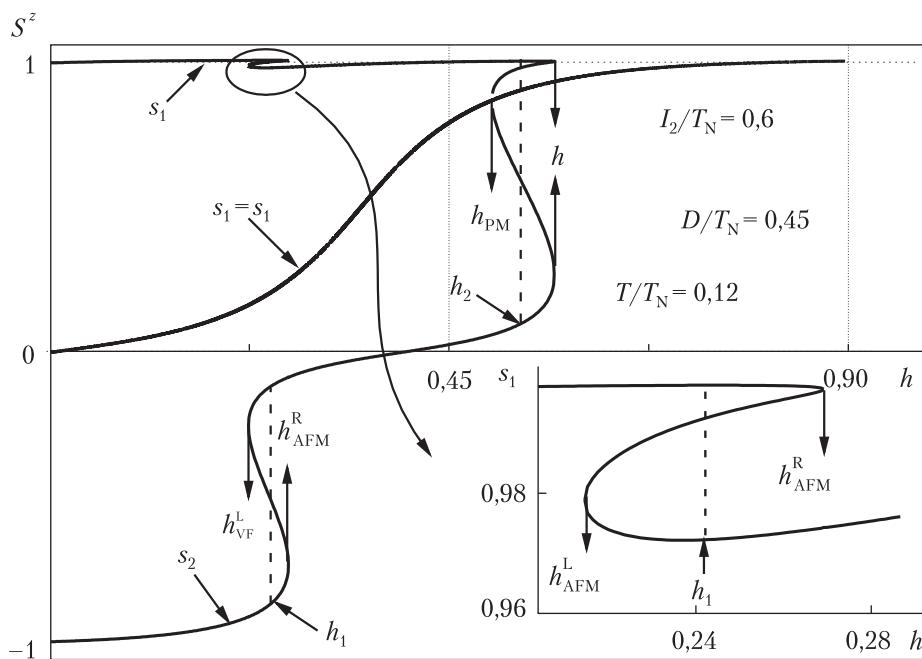
$$\begin{aligned} E_{T=0} = & I_1 \langle s_1^z \rangle \langle s_2^z \rangle - \frac{1}{2} I_2 (\langle s_1^z \rangle^2 + \langle s_2^z \rangle^2) + \\ & + D(\langle (s_1^z)^2 \rangle + \langle (s_2^z)^2 \rangle) - h(\langle s_1^z \rangle + \langle s_2^z \rangle), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\langle s_1^z \rangle, \langle s_2^z \rangle, \langle (s_1^z)^2 \rangle, \langle (s_2^z)^2 \rangle$  – квантовые средние спиновых состояний ионов подрешеток, которые в приближении самосогласованного поля могут принимать значения равные  $\pm 1$  или 0 [7].

Для  $T = 0$ , как показано в [7], минимум (2) в качестве основного дает АФМ состояние с  $\langle s_1^z \rangle = -\langle s_2^z \rangle = 1$  которое при вводе магнитного поля первым родом переходит в промежуточное состояние  $\langle s_1^z \rangle = 1, \langle s_2^z \rangle = 0$ . В сильных полях реализуется ФМ фаза с  $\langle s_1^z \rangle = \langle s_2^z \rangle = 1$ .

Для  $T \neq 0$  свободная энергия в расчете на два спина магнитной ячейки может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} F = & I_1 s_1 s_2 - \frac{1}{2} I_2 (s_1^2 + s_2^2) + D(q_{zz}^{(1)} + q_{zz}^{(2)}) - h(s_1 + s_2) + \\ & + T \left( \frac{q_{zz}^{(1)} + s_1}{2} \ln \frac{q_{zz}^{(1)} + s_1}{2} + \frac{q_{zz}^{(1)} - s_1}{2} \ln \frac{q_{zz}^{(1)} - s_1}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{q_{zz}^{(2)} + s_2}{2} \ln \frac{q_{zz}^{(2)} + s_2}{2} + \frac{q_{zz}^{(2)} - s_2}{2} \ln \frac{q_{zz}^{(2)} - s_2}{2} + (1 - q_{zz}^{(1)}) \ln(1 - q_{zz}^{(1)}) + (1 - q_{zz}^{(2)}) \right), \end{aligned} \quad (3)$$



**Рис. 1.** Полевая зависимость для спинов  $s_1(h)$  и  $s_2(h)$  при  $D/T_N = 0,45$  и  $T/T_N = 0,12$ . Константы обмена  $I_2/T_N = 0,6$ , где  $T_N = I_1 + I_2$ . Стрелками показаны границы потери устойчивости решений уравнения состояния, штриховые линии — точки равновесного QPT. На вставке приведена зависимость  $s_1(h)$  вблизи QPT

где  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $q_{zz}^{(1)}$  и  $q_{zz}^{(2)}$  — термодинамические средние  $z$ -проекций спинов и  $zz$ -компонент спиновых квадрупольных моментов подрешеток.

Для поиска равновесных состояний будем пользоваться уравнениями состояния:

$$\frac{\partial F}{\partial q_{zz}^{(1)}} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial s_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial q_{zz}^{(2)}} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial s_2} = 0. \quad (4)$$

Решения уравнений (4) модели (3) позволяют получить полевые зависимости для средних значений спина подрешеток при  $T \neq 0$ .

Для примера на рис. 1 показаны полевые зависимости проекций спинов подрешеток, полученные из уравнений состояния для температуры  $T/T_N = 0,12$ . Как видно из рисунка, численное решение уравнения состояния дает следующие решения.

**1. Антиферромагнитное (АФ) состояние.** В отсутствии внешнего магнитного поля ( $h = 0$ ), устойчивым является АФ состояние  $s_1(\tau, h=0) = -s_2(\tau, h=0)$ . При возрастании величины магнитного поля величина среднего спина  $s_1$  первой подрешетки, ориентированной вдоль поля, изменяется слабо, оставаясь почти все время близкой к насыщению. Более существенно изменяется величина среднего спина второй подрешетки  $s_2$  ( $s_2 < 0$ ), который изначально направлен против внешнего поля.

В силу сильной нелинейности модели, по мере роста внешнего поля  $h$  появляется неустойчивое решение с  $\frac{\partial s_1}{\partial h} < 0$ ,  $\frac{\partial s_2}{\partial h} < 0$  в интервале  $[h_{VF}^L, h_{AFM}^R]$ , границы которого на рис. 1

**Рис. 2.** Полевая зависимость намагниченности изинговского АФМ для трех значений температур,  $T/T_N = 0,11; 0,12; 0,2$ , константа обмена  $I_2/T_N = 0,6$ , а константа анизотропии  $D/T_N = 0,45$ , где  $T_N = I_1 + I_2$ . Стрелки — гистерезис намагничивания при QPT, штриховыми линиями указаны точки равновесного QPT

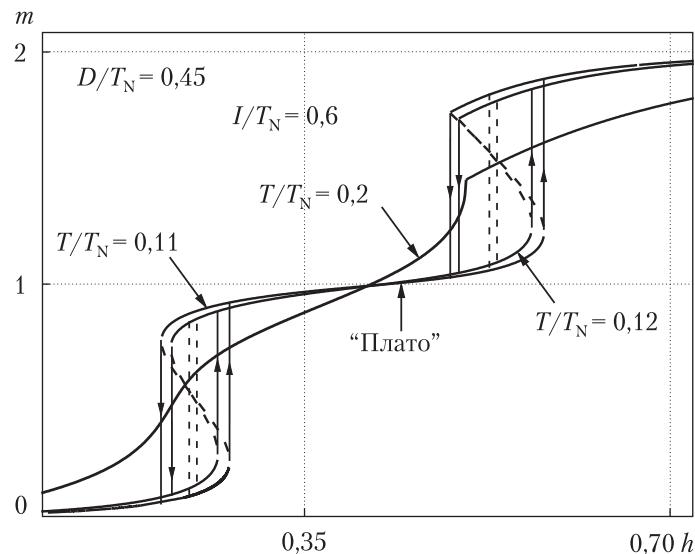
показаны стрелками. Численные значения границ для неустойчивых решений можно найти с помощью матрицы Гессе, составленной из вторых производных свободной энергии по параметрам порядка.

## 2. Промежуточное состояние с плато в намагничивании наблюдает-

ся в интервале полей  $h_{\text{VF}}^L < h < h_{\text{VF}}^R$ . Возникновение плато хорошо видно на рис. 2 для полевой зависимости намагниченности  $m = s_1 + s_2$ . На рис. 1 положение QPT показано штриховой вертикальной линией. Поле QPT I находили из условия равенства энергий устойчивых решений АФМ фазы и промежуточной фазы, в которой полевая зависимость намагниченности имеет вид плато (см. рис. 2). Особенностью этого перехода, является то, что значение среднего спина  $s_1$  первой подрешетки практически не изменяется, а величины  $s_2$  среднего спина после перехода становится близкой нулю. При QPT вторая подрешетка переходит в парамагнитное ван-флековское состояние, с основным состоянием  $|0\rangle$  для спинов этой подрешетки.

**3. Ферромагнитное состояние.** В сильных полях, превышающих  $h > h_{\text{FM}}$ , из уравнений состояния получаем ФМ решение с  $s_1 = s_2$ . Переход в ФМ состояние также является QPT I. При этом QPT основное состояние спинов второй подрешетки изменяется с  $|0\rangle$  на  $|1\rangle$ . Поле  $h_{II}$  этого QPT I находили из условия равенства энергий промежуточного состояния и ФМ фазы. Гистерезис в намагничивании при этом QPT лежит в интервале границ устойчивости промежуточной фазы и ФМ фазы  $h_{\text{FM}} < h < h_{\text{VF}}^R$ .

Таким образом, в данной работе получено, что в изинговском АФМ с легкоплоскостной анизотропией при  $T \neq 0$  переход из АФМ фазы в ФМ фазу реализуется в два этапа. На первом этапе происходит QPT I в промежуточное состояние, в котором вторая подрешетка находится в ван-флековском парамагнитном состоянии. Вторым этапом является QPT I из промежуточного состояния в ФМ состояние. Оказалось, что при конечной температуре намагничивание между этими QPT имеет вид плато с практически неизменяющимся по величине модулем намагниченности.



## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Локтев В.М., Островский В.С. Особенности статики и динамики магнитных диэлектриков с одноионной анизотропией. *Физика низких температур*. 1994. **20**, № 10. С. 983–1016.
- Калита В.М., Локтев В.М. Квантовые фазовые переходы и фазовая Н – Т диаграмма ван-флековского многоподрешеточного антиферромагнетика. *Физика низких температур*. 2006. **32**, № 2. С 158–168.

3. Розенфельд Е.В. О квантовых скачках намагниченности в магнетиках с одноионной анизотропией типа “легкая плоскость”. *Письма в ЖЭТФ*. 1976. **24**, № 2. С. 60–64.
4. Стишов С.М. Квантовые фазовые переходы. *Успехи физ наук*. 2004. **174**, № 8. С. 853–860.
5. Vojta M. Quantum phase transitions. *Rep. Prog. Phys.* 2003. **66**. P. 2069–2110.
6. Koga A., Kawakami N., Sigrist M. Quantum phase transition of the  $S = 1$  Shastry – Sutherland model. *J. Phys. Soc. Jpn.* 2003. **72**, № 4. P. 938–942.
7. Калита В.М., Локтев В.М. О последовательности квантовых (мета) магнитных переходов в изинговских антиферромагнетиках с одноионной анизотропией. *Физика низких температур*. 2005. **31**, № 7. Р. 815–819.
8. Hertz J.A. Quantum critical phenomena. *Phys. Rev. B*. 1976. **14**. P. 1165.
9. Lavanov G.Yu., Kalita V.M., Ivanova I.M., Loktev V.M. Magnetic quantum phase transitions and entropy in Van-Vleck magnet. *JMMM*. 2016. **416**. P. 466–474.
10. Шангина Е.Л., Долгополов В.Т. Квантовые фазовые переходы в двумерных системах. *Успехи физ. наук*. 2003. **173**, № 8. С. 802–812.
11. Зvezdin A.K., Matveev B.M., Mukhin A.A., Popov A.I. Редкоземельные ионы в магнитно-упорядоченных кристаллах. Москва: Наука, 1985. 296 с.

Поступило в редакцию 30.05.2018

## REFERENCES

1. Loktev, V. M. & Ostrovskii, V. S. (1999). The peculiarities of statics and dynamics of magnetic insulators with single-ion anisotropy. *Low. Temp. Phys.*, 20, No. 10, pp. 983-1016 (in Russian).
2. Kalita, V. M. & Loktev, V. M. (2006). Quantum phase transitions and phase H – T diagram of Van-Vleck multi – sublattice antiferromagnet. *Low. Temp. Phys.*, 32, No. 2, pp. 158-168 (in Russian).
3. Rozenfeld, E. V. (1976). Quantum magnetization jump with easy – plane anisotropy. *JETP. Lett.*, 24, No. 2, pp. 50-53.
4. Stishov, S. M. (2004). Quantum phase transitions. *Phys. Sci. Uspekhi*, 174, No. 8, pp. 853-860 (in Russian).
5. Vojta, M. (2003). Quantum phase transitions. *Rep. Prog. Phys.*, 66, pp. 2069-2110.
6. Koga, A., Kawakami, N. & Sigrist, M. (2003). Quantum phase transition of the  $S = 1$  Shastry – Suyherland model. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 72. No. 4, pp. 938-942.
7. Kalita, V. M. & Loktev, V. M. (2005). On the sequence of quantum (meta) magnetic transitions in Ising antiferromagnets with single – ion anisotropy. *Low. Phys. Temp.*, 31, No. 7, pp. 815-819 (in Russian).
8. Hertz, J. A. (1976). Quantum critical phenomena. *Phys. Rev. B*, 14, pp. 1165-.
9. Lavanov, G. Yu., Kalita, V. M., Ivanova, I. M. & Loktev, V. M. (2016). Magnetic quantum phase transitions and entropy in Van-Vleck magnet. *JMMM*, 416, pp. 466-474.
10. Shangina, E. L. & Dolgopolov, V. T. (2003). Quantum phase transitions in two – dimensional systems. *Phys. Sci. Uspekhi*, 173, No. 8, pp. 802-812 (in Russian).
11. Zvezdin, A. K., Matveev, V. M., Mukhin, A. A. & Popov, A. I. (1985). Rare – earth ions in magnetically ordered crystals. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 30.05.2018

феромагнітну відбувається через проміжний стан, у якому спін підгратки, початково намагнічений проти магнітного поля, знаходиться у ван-флеківському стані.

**Ключові слова:** ентропія, антиферомагнетик, paramagnetik, фазові переходи.

G.Yu. Lavanov

National Aviation University, Kiev

E-mail: Lavanovgennady@gmail.com

THE DOUBLE METAMAGNETIC PHASE TRANSITION  
IN AN ISING ANTIFERROMAGNET WITH LIGHT-PLANE  
SINGLE-ION ANISOTROPY AND WITH ION SPIN  $S = 1$

It is shown that, in an Ising AFM with ion spin  $S = 1$ , a magnetic field at  $T \neq 0$  can induce a double metamagnetic transition in the form of a sequence of two quantum first-order magnetic phase transitions (QPT I) from a plateau in the magnetization between these transitions. In this case, the transition from the antiferromagnetic phase to the ferromagnetic phase occurs through the intermediate state formation, in which the sublattice spin initially magnetized against the magnetic field is in the Van Vleck paramagnetic state.

**Keywords:** entropy, antiferromagnet, paramagnet, phase transitions.

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.070>

УДК 551.24

**А.М. Кушнір, Т.К. Бурахович,  
В.А. Ільєнко, В.Б. Джоашвілі**

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ  
E-mail: antonn@ukr.net

## **Електромагнітні дослідження вздовж профілю Несено-Іржавець – Абрамівка (південний борт Дніпровсько-Донецької западини)**

*Представлено академіком НАН України В.І. Старостенком*

У південному борту центральної частини Дніпровсько-Донецької западини вздовж профілю Несено-Іржавець–Абрамівка проведено синхронні МТ/МВ дослідження з метою вивчення глибинної структури літосфери в зв'язку з пошуком аномалій електропровідності, які можуть бути спричинені тріщинуватістю порід, в яких переміщуються флюїди та, можливо, утворюють родовища вуглеводнів. Нові сучасні експериментальні електромагнітні параметри, що описані в роботі, повинні деталізувати Кіровоградську аномалію електропровідності та стати основою для побудови тривимірної моделі в такій складній геологічній обстановці, як зчленування різновікових структур. Наведені експериментальні дані МТ/МВ спостережень підтверджують глибинні аномальні структури, знайдені в попередні роки.

**Ключові слова:** Кіровоградська аномалія електропровідності, Інгулецько-Криворізька шовна зона, Дніпровсько-Донецька западина, магнітотелуричне зондування, магнітоваріаційне профілювання, аномалії електропровідності.

У роботі [1] наведено результати комплексної геолого-геофізичної інтерпретації та виділено декілька перспективних площ для пошуку родовищ вуглеводнів у кристалічному фундаменті Дніпровсько-Донецької западини (ДДЗ), які характеризуються значним роздробленням [2], що підтвержується результатами якісної інтерпретації експериментальних даних магнітотелуричного зондування (МТЗ) та магнітоваріаційного профілювання (МВП).

Сучасний підхід до обробки експериментальних даних синхронних МТ/МВ зондувань та інтерпретація отриманих матеріалів дали можливість виділити в північно-західній частині ДДЗ аномальні області, які викликані не лише осадовими відкладами, а й провідними структурами з верхньою кромкою 3–5...8 км у консолідований земній корі [3]. В області зчленування південного борту ДДЗ з північною частиною Голованівської (Ядлово-Трактемирівської) шовної зони відсутні глибинні аномалії електропровідності, тоді як далі на схід

на межі з Інгульським мегаблоком за експериментальними даними [4] виділяється глибинна аномалія з верхньою кромкою  $> 20\text{--}40$  км.

Робота присвячена дослідженню змінного низькочастотного електромагнітного поля Землі іоносферно-магнітосферного походження вздовж південного борту центральної частини ДДЗ по профілю Несено-Іржавець–Абрамівка, метою якого є вивчення глибинної структури літосфери в зв'язку з пошуком аномалій електропровідності, які можуть бути спричинені тріщинуватістю порід, в яких переміщуються флюїди та, можливо, утворюють родовища вуглеводнів.

**Нові електромагнітні дослідження.** В основі МТ/МВ методів [5] лежить індукційний принцип, що ґрунтуються на явищі скін-ефекту — пропорційній залежності глибини проникнення електромагнітного поля від періоду коливань  $T$ .

У методі МТЗ звичайно використовують тензор імпедансу  $[Z]$ , який визначається із співвідношень між горизонтальними (тангенціальними) компонентами електричного та магнітного полів:

$$\mathbf{E}_t = [Z] \mathbf{H}_t, \text{ де } [Z] = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}.$$

За модулем  $|Z|$  розраховується ефективний (позірний) опір геоелектричного розрізу:

$$\rho_t = |Z|^2 / \omega \mu \approx 126,7 \cdot 10^3 |Z|^2 T,$$

де  $\omega = 2\pi/T$  — кругова частота;  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/м — абсолютна проникність вакууму.

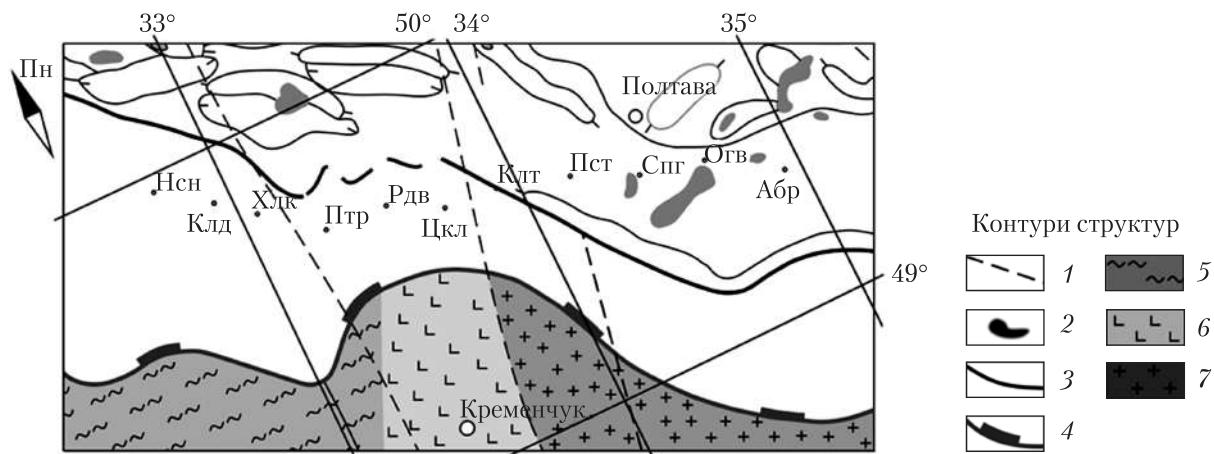
У методі МВП визначаються комплексні індукційні стрілки (типер), що розраховуються із співвідношення між вертикальною та тангенціальною складовими магнітного поля варіацій

$$H_z = [W] \mathbf{H}_t, \text{ де } [W] = [W_{zx}, W_{zy}].$$

Нові експериментальні спостереження проведені довгоперіодними цифровими станціями LEMI-417 з ферозондовими магнітометрами [6] в 11 пунктах, тривалість спостережень у польових точках становила 3–12 діб, відстань між пунктами спостережень — 15–20 км (рис. 1). Профіль Несено-Іржавець–Абрамівка перетинає південний борт (Лохвицький блок) у пунктах Несено-Іржавець (Нсн), Колодна (Клд), Хильківка (Хлк), Петрівка-Лози (Петр), Радивонівка (Рдв), Цикали (Цкл), Колотії (Клт) та осьову частину ДДЗ (Полтавський блок) у пунктах Пустовари (Пст), Сапожине (Спг), Огіївка (Огв), Абрамівка (Абр).

Обробка польового матеріалу виконана в рамках багатоточкової схеми оцінювання МТ/МВ відгуків між пунктами зондування та віддаленою референтною базою [7]. Завдяки такому підходу отримані достовірні оцінки параметрів позірного опору ( $\rho_n$ ) від 20 до 8000 с (рис. 2) та типерів для періодів геомагнітних варіацій 30–3700 с (рис. 3).

За результатами якісної інтерпретації графіків  $\rho_n$  для різних періодів та значень сумарної повзводжної провідності верхнього шару осадових відкладів ( $S_{oc}$ ) профіль можна розділити на три частини: перша (0–50 км) — пункти Нсн, Клд, Хлк, Петр — значення  $\rho_n$  для різних напрямків вимірювальних ліній ( $\rho_{xy}, \rho_{yx}$ ) збігаються та знаходяться в інтервалі величин від 10 до 100 Ом·м майже в усьому частотному діапазоні; друга (50–110 км) — пункти Рдв, Цкл, Клт — значення  $\rho_{xy}$  та  $\rho_{yx}$  відрізняються на 1–1,5 порядку,  $\rho_{xy}$  (меридіональний



**Рис. 1.** Розташування пунктів спостережень МТЗ та МВП на тектонічній карті [10]. Умовні позначення: 1 – розривні порушення; 2 – соляні куполи; 3 – південний скид ДДЗ; 4 – контури платформних структур; 5 – гнейово-сланцеві, гранітові комплекси Інгульського мегаблоку; 6 – метавулканогенні утворення та амфібол-гранітові комплекси; 7 – амфібол-гранітові плутоно-метаморфічні комплекси Середньодніпровського мегаблоку. Пункти спостережень: Несено-Іржавець (Нсн), Колодна (Клд), Хильківка (Хлк), Петрівка-Лози (Птр), Радивонівка (Рдв), Цикали (Цкл), Колотії (Клт), Пустовари (Пст), Сапожине (Спг), Огіївка (Огв), Абрамівка (Абр)

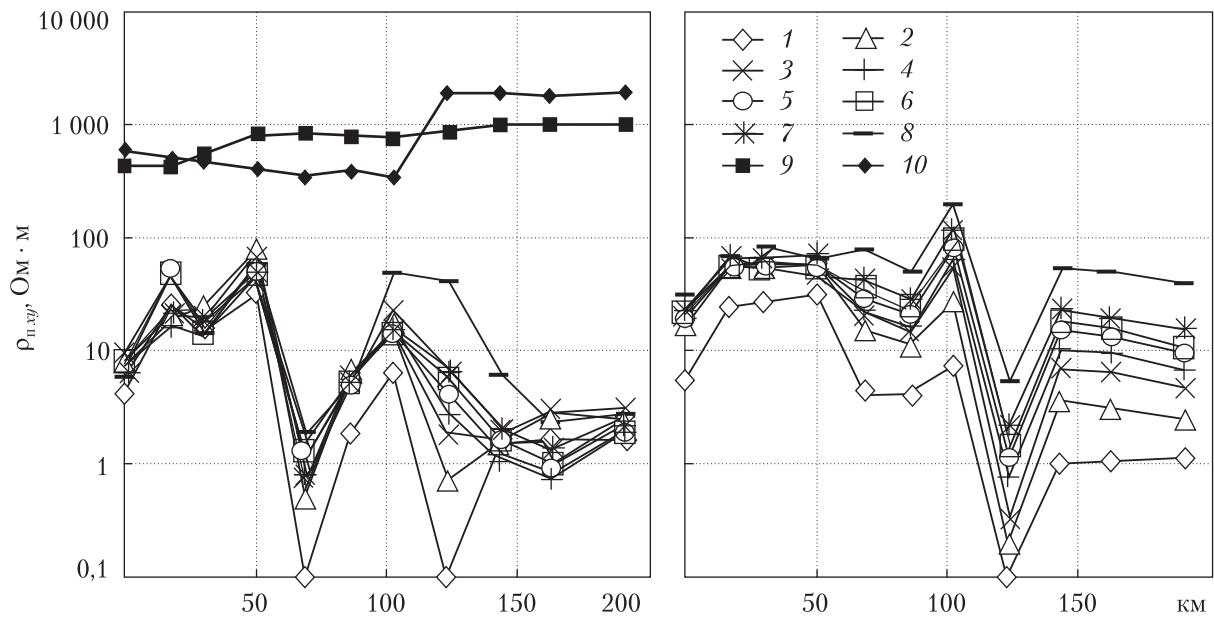
напрям кривої) в середньому відповідає рівню 1–10 Ом·м, тоді як  $\rho_{yx}$  (широтний) становить 10–100 Ом·м; третя (110–190 км) – пункти Пст, Спг, Огв, Абр – значення  $\rho_{\text{п}}$  від 1 до 50 Ом·м у всьому частотному діапазоні зростають зі збільшенням періоду, розходження між  $\rho_{xy}$  та  $\rho_{yx}$  спостерігається на періодах, більших за 100 с, і становить один порядок.

Значення  $S_{\text{oc}}$ , за даними [8], поступово зростають у східному напрямку від 450 (борт ДДЗ) до більш як 1000 См (осьова частина ДДЗ). Однак інформація про інтегральну електропровідність поверхневого шару  $S_{\text{oc}_{\text{cp}}}$ , яка отримана за висхідною гілкою спостережених кривих  $\rho_{\text{п}}$ , ці дані не підтверджують (див. рис. 2). У першій частині профілю значення  $S_{\text{oc}}$  та  $S_{\text{oc}_{\text{cp}}}$  майже збігаються та дорівнюють 450–600 См, далі в інтервалі від 50 до 110 км  $S_{\text{oc}_{\text{cp}}}$  значення відповідають 400–500 См і майже в два рази менші за  $S_{\text{oc}}$ , які дорівнюють 900 См, а в третьій частині ( $>110$  км) значення  $S_{\text{oc}_{\text{cp}}}$  удвічі більші за  $S_{\text{oc}}$  і становлять майже 2000 См.

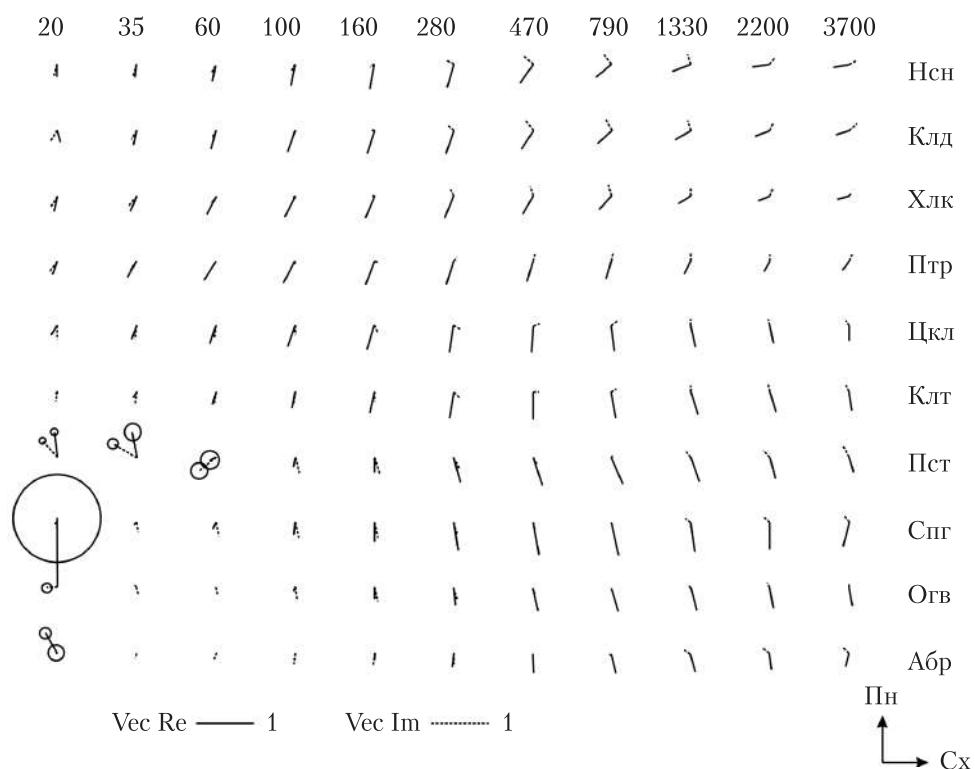
Зіставлення сукупності даних  $S_{\text{oc}_{\text{cp}}}$  та  $\rho_{\text{п}}$  свідчить про наявність глибинної аномалії електропровідності в середній частині профілю та передбачає в східній. Результати якісної інтерпретації кривих МТЗ показали, що мінімальні глибини залягання верхньої кромки провідника змінюються від 20–30 км на південному заході в прибортовій зоні до максимальних значень 50 км в осьовій зоні ДДЗ.

Розподіл реальної складової типера вказує на те, що максимум частотної характеристики змінюється вздовж профілю від 200 до 1300 с, їх основний напрямок – від південно-західного до південного. Отже, експериментальні спостереження можуть свідчити про занурення провідника з наближенням до осьової частини ДДЗ (див. рис. 3).

Таким чином, із застосуванням методів МТЗ і МВП проведено дослідження вздовж профілю Несено-Іржавець–Абрамівка, що перетинає унікальну Кіровоградську аномалію



**Рис. 2.** Розподіл позірного питомого електричного опору  $\rho_n$  для періодів: 1 – 16 с; 2 – 100 с; 3 – 200 с; 4 – 500 с; 5 – 1000 с; 6 – 1300 с; 7 – 2000 с; 8 – 8200 с по профілю Несено-Іржавець – Абрамівка; значення сумарної повзувальної провідності осадових відкладів ДДЗ:  $S_{oc}$  – за даними [8] (9);  $S_{oc_{sn}}$  – за даними інтерпретації спостережених кривих  $\rho_n$  (10)



**Рис. 3.** Розподіл спостережених комплексних типерів у широкому діапазоні геомагнітних варіацій по профілю Несено-Іржавець – Абрамівка

електропровідності [9]. Вона являє собою витягнуту з півдня на північ — північний схід структуру завдовжки майже 600 км, яка повністю перекриває Інгулецько-Криворізьку шовну зону та східну частину Інгульського мегаблоку. Вся ця глибинна структура в межах Інгулецько-Криворізької шовної зони продовжується на північний схід в бік ДДЗ і далі на північ.

За результатами тривимірного моделювання Кіровоградської аномалії електропровідності в роботі [9] район дослідження характеризується аномалією питомого електричного опору ( $\rho < 30 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ) на глибинах від 10—25 км та  $> 10 \text{ Ом} \cdot \text{м}$  в інтервалі глибин 25—30 км. Але нові сучасні експериментальні електромагнітні параметри, що описані в даній роботі, повинні деталізувати цю аномальну структуру та стати основою для побудови тривимірної моделі в такій складній геологічній обстановці, як зчленування різновікових структур.

У роботі [1] виділено прогнозні нафтогазові площини кристалічного фундаменту ДДЗ за комплексом геолого-геофізичних методів. Профіль Несено-Іржавець—Абрамівка перетинає південно-східну частину Глидинцівської площини, яка характеризується наявністю коромантійної суміші потужністю 2—5 км, що притаманно нафтовим та нафтоконденсатним родовищам. Крім того, роздробленість та розущільнення у кристалічному фундаменті й консолідований корі на глибинах 20—30 км, що обумовлено крупним вузлом перетину зон розломів різних систем. Згідно з результатами 3D геоелектричного моделювання, саме на цих глибинах знайдено аномальні структури, що підтверджуються новими даними експериментальних МТ/МВ спостережень.

Глибинні аномалії електропровідності можуть пояснюватися проникненням флюїдів з кори і мантії та бути важливим джерелом для всіх подальших процесів формування нафтогазових родовищ.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Тектоника и углеводородный потенциал кристаллического фундамента Днепровско-Донецкой впадины: Старostenko B.И., Русаков O.М. (ред.). Київ: Галактика, 2015. 211 с.
2. Омельченко В.Д., Кучма В.Г. Раздробленность земной коры и нефтегазоносность Днепровско-Донецкого авлакогена. *Геодинаміка*. 2013. **15**, № 2. С. 54—55.
3. Кушнір А.Н., Бурахович Т.К. Результаты электромагнитных исследований Брагинско-Лоевского выступа и Черниговского блока ДДВ. *Геофиз. журн.* 2016. **38**, № 3. С. 128—137.
4. Кушнір А.Н., Бурахович Т.К., Шишков Б.И., Джоашвілі В.Б. Электромагнитные исследования северного склона центральной части Украинского щита. *Допов. Нац. акад. наук Ukr.* 2017. № 10. С. 60—69. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.10.060>
5. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Модели и методы магнитотеллурики. Москва: Научный мир, 2009. 679 с.
6. Корепанов В.Е., Трегубенко В.И. Особенности построения и тенденции развития современной аппаратуры для магнитотеллурических и магнитовариационных зондирований. *Геофиз. журн.* 2009. **31**, № 4. С. 181—190.
7. Varentsov Iv. M. Arrays of simultaneous EM soundings: design, data processing and analysis. *EM sounding of the Earth's interior* (Methods in geochemistry and geophysics, 40). New York: Elsevier, 2007. P. 263—277.
8. Baysorovich M.M., Tregubenko V.Iv., Nasad A.G. Geoelectric heterogeneities of Ukraine's lithosphere. *Геол. журн.* 1998. **2**, № 1. С. 23—35.
9. Геолого-геофизическая модель Криворожско-Кременчугской шовной зоны Украинского щита: Анциферов А.В. (ред.). Київ: Наук. думка, 2006. 197 с.
10. Тектонічна карта України. Масштаб 1 : 1 000 000. Київ: УкрДГРІ, 2007.

Надійшло до редакції 23.03.2018

## REFERENCES

1. Starostenko, V. I. & Rusakov, O. M. (Eds.) (2015). Tectonics and hydrocarbon potential of crystalline basement of the Dnieper-Donets depression. Kiev: Halaktika (in Russian).
2. Omelchenko, V. D. & Kuchma, V. G. (2013). Crust fragmentation and oil and gas potential of the Dnieper-Donets aulacogen. Heodynamika, 15, No. 2, pp. 54-55 (in Russian).
3. Kushnir, A. N. & Burakhovich, T. K. (2016). The results of electromagnetic studies of the Bragin-Loev ledge and the Chernihiv block of the DDD. Geophys. J., 38, No. 3, pp. 128-137 (in Russian).
4. Kushnir, A. N., Burakhovich, T. K., Shyrkov, B. I. & Dzhaoshvili, V. B. (2017). Electromagnetic studies of the northern slope of the central part of the Ukrainian Shield. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 10, pp. 60-69 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.10.060>
5. Berdichevsky, M. N. & Dmitriev, V. I. (2009). Models and methods of magnetotellurics. Moscow: Nauchnyi mir (in Russian).
6. Korepanov, V. E. & Tregubenko, V. I. (2009). Special features of construction and trends of development of modern hardware for magneto-telluric and magneto-variation soundings. Geophys. J., 31, No. 4, pp. 181-190 (in Russian).
7. Varentsov, Iv. M. (2007). Arrays of simultaneous EM soundings: design, data processing and analysis. EM sounding of the Earth's interior (Methods in geochemistry and geophysics, 40) (pp. 263-277). New York: Elsevier.
8. Baysorovich, M. M., Tregubenko, V. Iv. & Nasad, A. G. (1998). Geoelectric heterogeneities of Ukraine's lithosphere. Geophys. J., 2, No. 1, pp. 23-35.
9. Antsiferov A.B. (Ed.). (2006). Geological and geophysical model of the Krivoy Rog-Kremenchug suture zone of the Ukrainian Shield. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
10. Tectonic map of Ukraine. (2006). 1 : 1 000 000. Kiev: UkrDHRI (in Ukrainian).

Received 23.03.2018

А.Н. Кушнір, Т.К. Бурахович,  
В.А. Ільєнко, В.Б. Джоашвили

Інститут геофізики ім. С.І. Субботина НАН України, Київ  
E-mail: antonn@ukr.net

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВДОЛЬ ПРОФИЛЯ НЕСЕНО-ИРЖАВЕЦ–АБРАМОВКА (ЮЖНЫЙ БОРТ ДНЕПРОВСКО-ДОНЕЦКОЙ ВПАДИНЫ)

В южном борту центральной части Днепровско-Донецкой впадины вдоль профиля Несено-Иржавец—Абрамовка были проведены синхронные МТ/МВ исследования с целью изучения глубинной структуры литосферы в связи с поиском аномалий электропроводности, которые могут быть вызваны трещиноватостью пород, которыми мигрируют флюиды и, возможно, образуют месторождения углеводородов. Новые современные экспериментальные электромагнитные параметры, описанные в данной работе, должны детализировать Кировоградскую аномалию электропроводности и стать основой для построения трехмерной модели в такой сложной геологической обстановке, как сочленение разновозрастных структур. Приведенные экспериментальные данные МТ/МВ наблюдений подтверждают глубинные аномальные структуры, выявленные в предыдущие годы.

**Ключевые слова:** Кировоградская аномалия электропроводности, Ингульско-Криворожская шовная зона, Днепровско-Донецкая впадина, магнитотеллурическое зондирование, магнитовариационное профилирование, аномалии электропроводности.

*A.N. Kushnir, T.K. Burakhovich,  
V.A. Ilyenko, V.B. Dzhaoshvili*

S.I. Subbotin Institute of Geophysics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: Antonn@ukr.net

ELECTROMAGNETIC STUDIES ALONG  
THE NESENO-IRZHAVETS—ABRAMIVKA PROFILE  
(SOUTHERN SLOPE OF THE DNIEPER-DONETS TROUGH)

The simultaneous MT/MV studies were carried out along the Neseno-Irzhavets—Abramivka profile to study the deep structure of the lithosphere and to search for electrical conductivity anomalies that may be caused by the fracturing of the rocks, through which the fluids migrate and possibly create hydrocarbon deposits. The described new modern experimental electromagnetic parameters should detail the Kirovograd electrical conductivity anomaly and become the basis for the three-dimensional model construction in such complex geological environment as the uneven-aged structure junction. The described experimental MT/MV observations confirm the deep anomalous structures that were investigated in the previous years.

**Keywords:** *Kirovograd anomaly of electrical conductivity, Ingulets—Krivoi Rog suture zone, Dnieper—Donets trough, magnetotelluric sounding, magnetovariational profiling, anomalies of electrical conductivity.*

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.077>

УДК 528.8: 911.3

**В.І. Лялько, Л.О. Єлістратова,  
О.А. Апостолов, А.Я. Ходоровський**

ДУ “Науковий центр аерокосмічних досліджень Землі  
Інституту геологічних наук НАН України”, Київ  
E-mail: alex@casre.kiev.ua

**Оцінка стану та змін загального  
соціально-економічного розвитку України  
за період 1992–2012 роки на основі матеріалів  
зйомок космічного апарату DMSP/OLS (США)  
про нічну освітленість території**

*Представлено академіком НАН України В.І. Ляльком*

*Проведено кореляційну оцінку змін основних соціально-економічних показників України з даними аналізу інтенсивності нічної освітленості за матеріалами зйомок космічним апаратом DMSP/OLS. Використовувався архів супутникових знімків за період 1992–2012 рр. та статистичні дані про кількість міського і сільського населення, валового регіонального продукту за цей період. Встановлено, що супутникові дані про нічну освітленість території з супутника DMSP/OLS корелюють з показниками, що характеризують соціально-економічний стан країни, і можуть бути використані як незалежний дистанційний моніторинг соціоекономічного розвитку України.*

**Ключові слова:** нічна освітленість, DMSP/OLS, кількість населення, регіональний валовий продукт, Україна.

**Актуальність теми дослідження.** Розпад СРСР супроводжувався зміною економічної і соціальної ситуації в Україні. Економічний спад і соціальна деградація 1990-х рр. змінилася періодом поступового розвитку країни. Однак сьогодні нарощають кризові явища в економічній, соціальній, природній та інших сферах життєдіяльності українського суспільства. У цих умовах зростає необхідність в об'єктивному оперативному моніторингу і оцінці спрямованості подібних змін економіки і соціальної сфери життєдіяльності населення. Такий моніторинг традиційно проводиться на основі даних офіційної статистики, які надходять з регіонів. Якість подібної статистичної інформації має великий вплив на характер прогнозистичних моделей розвитку регіонів. Одним із методів незалежного контролю отриманої інформації можуть бути дані супутниковых спостережень [1, 2].

Метою нашого дослідження є оцінка основних соціоекономічних показників на території України з врахуванням даних, отриманих з американського супутника DMSP/OLS

(Defense Meteorological Satellite Program/Operational Linescan System) [3], даних офіційної статистики [4, 5] та з'ясування регіональних особливостей їх прояву.

**Стан вивчення питання.** На сьогодні супутникові дані стають все більш затребуваними в різних галузях народного господарства. Зокрема, на основі супутниковых зображеній DMSP/OLS можна простежити зміни нічної освітленості окремих регіонів або країн. Раніше проведені дослідження виявили, що показники нічної освітленості досить добре корелюють з кількістю населення, з величинами регіонального валового продукту або з розвитком окремих галузей промисловості [6]. Крім того, за цими даними можна простежити розвиток міських агломерацій у різних країнах світу [7–10]. Нами проаналізовано можливість використання цих даних як основи для оцінки змін узагальненого соціоекономічного стану України та визначено регіональні прояви цих змін.

**Матеріали та методи дослідження.** Матеріали космічної зйомки DMSP/OLS є унікальним глобальним відображенням діяльності людини. Перевагою даних DMSP/OLS є час спостережень, просторова розрізnenість, глобальне охоплення і доступність на значному часовому проміжку. Більшість інших супутниковых даних отримані в денний час і є відображенням відбиття освітленості від різних видів земного покриву. Нічне супутникое зображення формується у видимому діапазоні фіксуванням випромінювання від світлових джерел, що пов'язані як з людською діяльністю, так і з природними процесами (вулканізм, лісові пожежі тощо). Техногенними факторами освітленості є світлові джерела міст, населених пунктів, промислових об'єктів, доріг та ін.

На супутнику DMSP/OLS встановлено два телескопи і фотомножник. Один з телескопів фіксує видиму частину спектра і чутливий до випромінювання в діапазоні 0,40–1,10 мкм. Інший – інфрачервоний телескоп, що чутливий до випромінювання в діапазоні 10–13,4 мкм. Супутник DMSP/OLS знаходиться на сонячно-синхронній полярній орбіті [3, 11]. Він дає можливість отримати нічні зображення земної поверхні у видимому діапазоні спектра кожну добу з просторовою розрізnenістю 900 м. Для дослідження був використаний архів даних за 1992–2012 рр. Використовувалася четверта версія архіву даних про стабільну нічну освітленість. Дані отримані з шести супутниковых серій DMSP/OLS (F10, F12, F14, F15, F16, F18). У цій версії стандартна попередня обробка даних складається з очищення зображень від хмар і створення композита постійних протягом календарного року джерел підвищеної нічної освітленості території на всіх безхмарних зображеннях, отриманих протягом року.

Для роботи були взяти дані серії F10 за період 1992–1994 рр., з F12 за період 1995–1999 рр., з F14 за період 2000–2003 рр., з F16 за період 2004–2009 рр., з F18 за період 2010–2012 рр. За допомогою програми по обробці космічних знімків Erdas Imagine отримані дані були попередньо переглянуті, а потім проведена їх первинна обробка. Вхідні дані з супутника DMSP/OLS мають географічну проекцію, тому для роботи з ними виконувалася така послідовність дій:

1) на всіх знімках виділялась територія України за допомогою функції *SubSet* програми Erdas Imagine та контуру України у форматі \*.aoi;

2) з отриманих на першому етапі 21 знімка території України було сформовано 21 канальний знімок України в географічній системі координат за допомогою функції *LayerStack* програми Erdas Imagine, де кожний канал відповідає року зйомки;

3) потім каналні знімки було переведено в систему координат WGS 84 / zone 36 за допомогою функції *Reproject* програми Erdas Imagine;

4) виконане нормування даних цих знімків за формулою  $100 \cdot \left( \frac{DN - MIN}{MAX - MIN} \right)$ , де  $DN$  – вхідне значення з файла (digital number),  $MIN$ ,  $MAX$  – мінімальне та максимальне значення, за допомогою *Modeler Maker* програми Erdas Imagine. Нормування необхідно проводити, оскільки розробники сканера OLS спеціально на цьому наголосили у файлі супроводу до космічних знімків.

Таким чином, нормовані дані знаходяться в діапазоні 0–100, що дає змогу порівнювати між собою нічну освітленість території за різні роки. Як свідчать результати аналізу отриманих даних зйомок, значна частина території України характеризується нормованими значеннями інтенсивності освітленості, що дорівнюють нулю. Виходячи зі змісту задачі, що вирішується, ця територія була виключена з подальшого розгляду.

Крім того, в досліджені використовувалися статистичні дані з кількості загального населення та окремо міського і сільського за період 1992–2012 рр. [4, 5] (крім 1994 р., на який відсутня статистика) та дані валового регіонального продукту з 1996 р. (коли було введено в Україні гривну) по 2012 р.

**Результати дослідження.** В сучасних умовах становлення та розвитку економіки Україна зіштовхнулася з новими безпрецедентними викликами геополітичного, військового та соціально-економічного характеру, що швидко змінюються у часі. У цих умовах потрібна швидка оцінка впливу вказаних чинників змін на економіку держави з метою прийняття відповідних заходів. Відомі соціоекономічні методи досліджень потребують багато часу. Значну допомогу в вирішенні цих питань дає використання шляхом спеціальної інтерпретації матеріалів дистанційного зондування землі (ДЗЗ) у комплексі зі статистичними даними, що сприяє розумінню багатьох особливостей і процесів соціоекономічного розвитку України. Саме такі дані ДЗЗ дають можливість оперативно отримувати важливі відомості, які недоступні наземним методам, зокрема про економічну концентрацію через збільшення інтенсивності населення та економічної щільності у великих та малих містах. Економічний розвиток пов’язаний насамперед зі збільшенням промислового виробництва, яке розташовується переважно у великих містах. Промисловий розвиток супроводжується підвищеннем чисельності та щільності населення, оскільки люди переселяються в промислові центри. Внаслідок цього тут відбувається підвищення площи освітлених територій та інтенсивності нічної освітленості.

Для визначення спрямованості змін в економіці та соціальній сфері використовувалися такі показники (табл.1):

1) сумарна інтенсивність нічного освітлення (*CIO*) – це сума значень освітленості всіх пікселів по всій території України. Починаючи з 1992 р. до 2000 р. значення СІО знижується, з 2001 р. по 2009 р. – стабілізується в середньому на рівні 1450000, а з 2010 р. – зростає;

2) кількість яскравих пікселів (*КЯП*) – це пікселі, що “світилися” вночі. Тут відмічається два періоди: з 1992 по 2002 рр. падіння значень цього параметра і з 2003 по 2012 рр. – коливання в межах 157576 (2004 р.)–230021 (2011 р.);

3) коефіцієнт відношення сумарної інтенсивності освітлення до кількості яскравих пікселів ( $K = CIO/KAP$ ). Коефіцієнт вводився, щоб одночасно враховувати показники СІО і КЯП;

4) валовий регіональний продукт (*ВРП*, млрд грн), який на регіональному рівні є узагальнюючим показником, що характеризує рівень розвитку економіки регіону [4, 5]. Економічну динаміку 1992–2012 рр. доцільно розглядати крізь призму двох періодів: 1992–1999 рр. та 2000–2012 рр., що обумовлено як різнонаправленістю економічних тенденцій, так і становленням нових підходів до збирання та обробки статистичної інформації. Період 1992–1999 рр. вважався як кризовий трансформаційний, коли, незважаючи на найбільш інтенсивне згортання виробництва (1991–1996 рр.), усе ж відбувалося повільне зростання ВРП. Період 2000–2012 рр. – період економічного зростання. Отже, за весь період України як самостійної держави відбувалося поступальне економічне зростання;

5) \$100 –офіційний курс долара щодо гривні по роках [12];

6) *ВРП*, млрд дол. – валовий регіональний продукт у доларовому еквіваленті, для того щоб врахувати інфляційні процеси. За весь період спостережень ВРП в доларовому еквіваленті зрос у 4 рази, а в гривневому – майже в 20 разів;

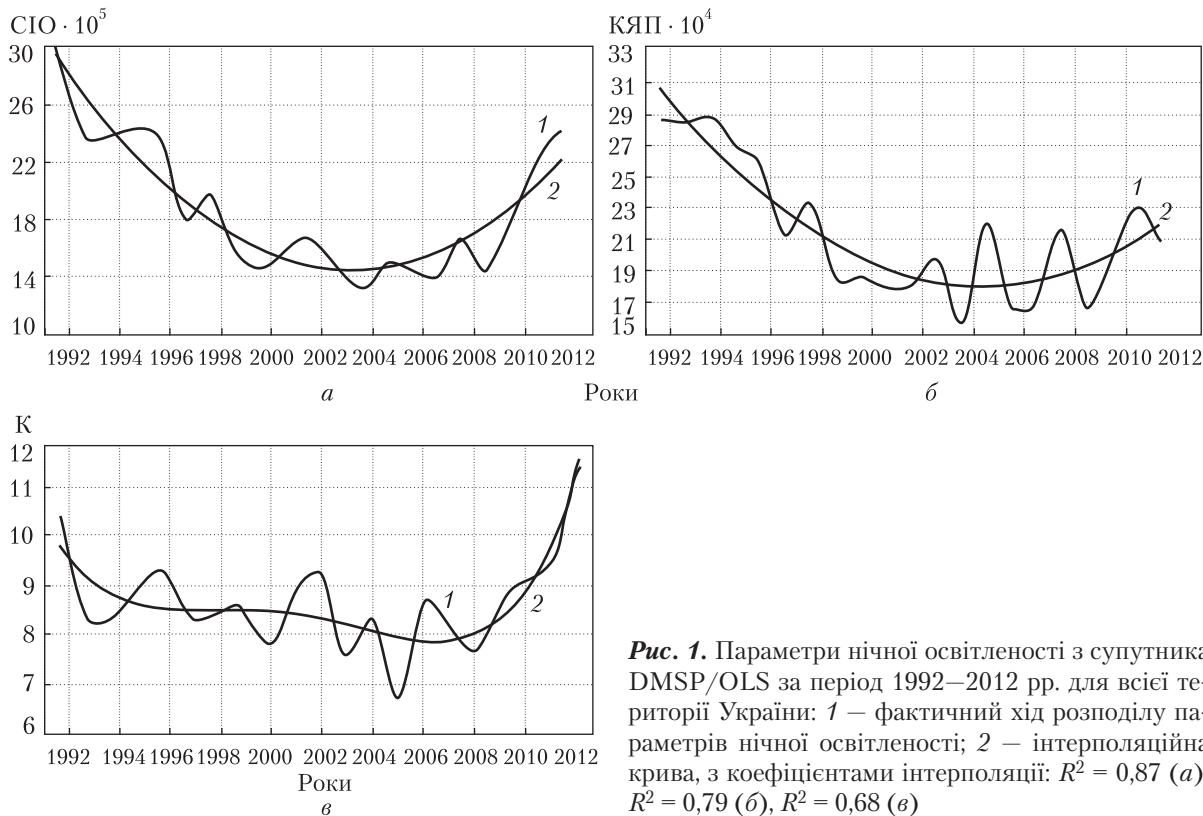
7) *населення загальне*, тис. – це дані середньої чисельності наявного населення за кожен рік;

8) *населення міст*, тис. – це дані середньої чисельності наявного населення за кожен рік, яке проживає в містах;

9) *населення сіл*, тис. – це дані середньої чисельності наявного населення за кожен рік, яке проживає в сільських населених пунктах. Розвинуті держави приділяють все більше

**Таблиця 1. Дані нічної освітленості, отримані з супутника DMSP/OLS, та статистичні дані розподілу ВРП і населення України**

Рік	СІО	КЯП	К	ВРП, млрд грн	\$ (100)	ВРП, млрд дол.	Кількість населення, тис.		
							загальна	міст	сіл
1992	2987336	287223	10,40				52244,1	35471,0	16773,1
1993	2394773	285642	8,38				52114,4	35400,7	16713,7
1994	2397704	288848	8,30						
1995	2429980	270987	8,97				51334,1	34832,5	16501,6
1996	2380302	256012	9,30	81,52	182,95	44,56	50893,5	34521,8	16371,7
1997	1793861	213588	8,40	93,37	186,17	50,15	50499,9	34271,6	16228,3
1998	1973673	233534	8,45	102,59	244,95	41,88	50105,6	34017,4	16088,2
1999	1593577	185919	8,57	130,44	413,04	31,58	49710,8	33796,5	15914,3
2000	1457638	186850	7,80	170,07	544,02	31,26	49291,2	33537,2	15754,0
2001	1586976	180589	8,79	204,19	537,21	38,01	48672,8	32743,3	15929,5
2002	1665754	179963	9,26	225,81	532,66	42,39	48003,5	32328,4	15675,1
2003	1500038	197966	7,58	267,34	533,27	50,13	47622,4	32146,5	15476,0
2004	1315368	157576	8,35	345,11	531,92	64,88	47280,8	32009,3	15271,5
2005	1488472	221601	6,72	441,45	512,47	86,14	46958,7	31886,7	15072,1
2006	1457296	168025	8,67	544,15	505,00	107,75	46646,0	31777,4	14868,6
2007	1392923	171166	8,14	720,73	505,00	142,72	46372,7	31668,8	14703,9
2008	1667252	216746	7,69	948,06	526,72	179,99	46143,7	31587,2	14556,5
2009	1442593	166122	8,68	913,35	779,12	117,23	45962,9	31524,8	14438,1
2010	1821333	198071	9,12	1082,57	793,56	136,42	45778,5	31441,6	14336,9
2011	2200074	230021	9,56	1302,08	796,76	163,42	45644,4	31384,7	14259,7
2012	2418047	208681	11,59	1459,10	799,10	182,59	45560,3	31373,7	14186,5



**Рис. 1.** Параметри нічної освітленості з супутника DMSP/OLS за період 1992–2012 рр. для всієї території України: 1 – фактичний хід розподілу параметрів нічної освітленості; 2 – інтерполяційна крива, з коефіцієнтами інтерполяції:  $R^2 = 0,87$  (а),  $R^2 = 0,79$  (б),  $R^2 = 0,68$  (в)

уваги таким соціальним явищам, як здоров'я та збереження життя кожної людини, які в новій системі цінностей набувають значної ваги. На жаль, депопуляція населення в Україні, зокрема високий рівень смертності, його старіння, є ознаками демографічної кризи. За період з 1992 по 2012 рр. кількість загального населення зменшилася в абсолютній величині на 6683,8 тис. За цей період кількість населення міст зменшилася на 4097 тис., а сільського населення — на 2568,6 тис. У відносному значенні загальна кількість населення країни зменшилася на 12,97 %, міського — на 11,52 %, сільського — на 15,42 %. Зменшення сільського населення можна пояснити вищим рівнем смертності, ніж у містах, міграцією з сіл до міст та за кордон. В цілому основними факторами зменшення населення є демографічні, екологічні та соціально-економічні, зокрема поширення соціальних негативних негараздів у суспільстві, що підвищує рівень зовнішньої міграції.

Розподіл отриманих значень усіх трьох коефіцієнтів нічної освітленості за роками (рис. 1) можна описати параболічною залежністю (особливо розподіл значень  $CIO$  та  $KЯП$ ). Судячи з наведених графіків, до 2001–2002 рр. відбувалося падіння інтенсивності нічної освітленості території України, що пов'язано з перебудовою економіки держави. З 2001, 2002 рр. і до 2006 р. освітлення було приблизно на одному рівні, що відповідає періоду стабілізації економіки країни. З 2006 р. почалося збільшення інтенсивності освітлення території, це може відповідати періоду зростання економіки.

Для встановлення залежності між різними показниками яскравості та основними соціоекономічними показниками проводився кореляційний аналіз між ними. Слід зазначи-

ти, що дані сканера OLS не калібривані і коефіцієнти передачі не записуються в потік даних, тому показники нічної освітленості, одержані з супутника DMSP/OLS за різні роки, не можна безпосередньо зіставляти між собою. Проведене нормування дало можливість зіставити дані за різні роки, але отримані величини значно відрізняються між собою. З метою визначення загальної тенденції зміни даних було проведено осереднення показників освітленості ковзним п'ятирічним вікном. Отримані результати кореляції наведені в табл. 2.

Аналіз даних табл. 2 свідчить про те, що статистично значущий коефіцієнт кореляції між параметрами нічної освітленості та ВРП складає  $K$  ( $R^2 = 0,64$ ), який інтегрує в собі інтенсивність освітлення та площу по кожному пікселю зйомки. При кореляції параметрів освітленості з кількістю загального, міського та сільського населення статистично значущі коефіцієнти кореляції дав показник *КЯП*, це пояснюється тим, що показник відображає фактичну площу всіх об'єктів, які дають світло (як у містах, так і в селах). Показник *CIO* статистично значущо корелює з кількістю загального населення та населення міст. Цей показник характеризує інтенсивність нічного світла, відповідно, інтенсивність міських агломерацій значно перевищує інтенсивність освітленості сільських територій. Таким чином, для території України інтегральний показник нічної освітленості  $K$  характеризує економічну складову, а *CIO* та *КЯП* – соціоекономічну, тобто враховує щільність населення.

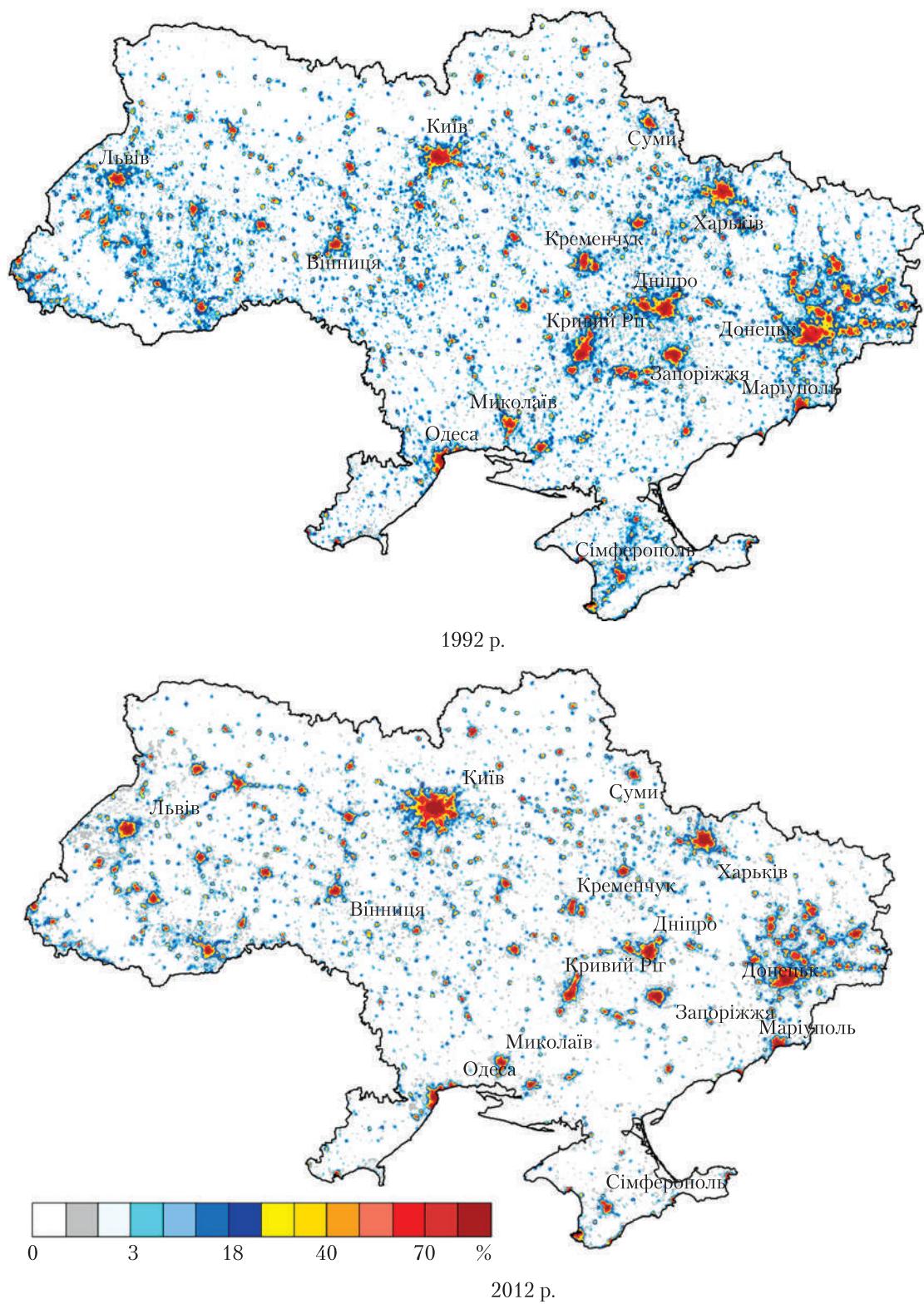
Проведене дослідження сумісного аналізу супутникових даних нічної освітленості та основних соціоекономічних показників виявило однакову тенденцію щодо економічної ситуації за період з 1992 до 2012 рр. Відбувається постійне зростання економіки при постійному скороченні населення України. За такої тенденції середній

**Таблиця 2. Коефіцієнти кореляції параметрів нічної освітленості з статистичними даними валового регіонального продукту та кількістю населення (загального, міського та сільського) України**

Параметри освітленості	ВРП, млрд грн	ВРП, млрд дол.	Кількість населення, тис.		
			загальна	міст	сіл
<i>CIO</i>	0,25	0,16	0,63	0,70	0,49
<i>КЯП</i>	-0,14	-0,14	0,79	0,84	0,68
$K$	0,64	0,47	-0,03	0,05	-0,17

**Таблиця 3. Валовий регіональний продукт на душу населення України за період 1992–2012 рр.**

Рік	Дохід		Рік	Дохід	
	грн	дол.		грн	дол.
1996	1601,757	875,516	2005	9400,848	1834,419
1997	1848,816	993,0792	2006	1165,59	2310,017
1998	2047,536	835,8994	2007	15542,14	3077,652
1999	2624,017	635,2938	2008	20545,73	3900,678
2000	3450,312	634,2251	2009	19871,35	2550,474
2001	4195,156	780,9155	2010	23647,98	2979,971
2002	4704,032	883,1209	2011	28 526,58	3580,339
2003	5613,825	1052,717	2012	32 025,64	4007,698
2004	7299,221	1372,24			



**Рис. 2.** Зміна показника нічної освітленості за 1992 і 2012 рр. по території України

дохід громадянина України має збільшуватися кожного року, це підтверджується даними доходу по роках у гривневому еквіваленті. У табл. 3 наведено дані ВРП на душу населення, тобто це те, що країна “заробила” в грошовому еквіваленті, поділено на кількість населення.

Для оцінки динаміки соціоекономічного розвитку в часі було проаналізовано нічне освітлення території України за 1992 та 2012 рр. (рис. 2). З рис. 2 за 2012 р. візуально видно зменшення площ нічної освітленості на 27,4 % відносно 1992 р. по всій території України (показник *КЯП*). Були втрачені невеликі за розмірами низькоенергетичні об'єкти, що пов'язано зі зменшенням кількості сіл, невеликих містечок, закриттям в них малих виробництв і, відповідно, зменшенням сільськогосподарських виробництв. Показник *CIO* за 2012 р. менший за його величину 1992 р. на 19,1 %.

Відбулися зміни в перерозподілі великих міських агломерацій. Значно за площею виросла Київська агломерація, в деяких інших — збільшилася сама освітленість міста (Львів) без збільшення площі агломерації. Для інших великих міст територія самого міста залишилася інтенсивно освітленою, але зменшилася його агломеративність, що свідчить про певні негативні тенденції розвитку в промисловості (закриття та скорочення виробництв у межах агломерацій та ін.).

Таким чином, супутникова інформація про нічну освітленість може бути використана як незалежне додаткове джерело даних про населення і валовий регіональний продукт України та характеризувати їх динаміку змін у часі. Аналіз одержаних матеріалів також дає можливість розробити конкретні рекомендації для мінімізації тенденцій, що негативно впливають на демографічні та економічні процеси в нашій державі.

Отже, за матеріалами космічної зйомки з супутника DMSP/OLS (США) розраховано параметри нічної освітленості *CIO*, *КЯП* та *K* території України у нічний час за 1992–2012 рр. За результатами кореляційного аналізу отримано кількісні оцінки зв'язку між основними параметрами освітленості території за нічними супутниковими зображеннями та показниками соціоекономічного розвитку України. Обґрунтовано можливість використання даних нічної космічної зйомки супутника DMSP/OLS (США) як індикатора розселення населення для оцінки людності населених пунктів і, відповідно, їх економічної активності. Для об'єктивного, оперативного контролю за соціоекономічним розвитком України доцільно залучати поряд зі статистичними матеріалами також дані ДЗЗ різних типів.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Лялько В.І., Сахацький О.І., Єлістратова Л.О., Апостолов О.А. Використання космічних знімків NPP/VIIRS у нічний час для оцінки економічної кризи на сході України (Донецька та Луганська області). *Вісн. НАН України*. 2017. № 2. С. 48–53. doi: <https://doi.org/10.15407/visn2017.02.048>
2. Лялько В.І., Єлістратова Л.О., Апостолов О.А. Оцінка посівних площ озимих культур за даними космічної зйомки з супутника Landsat на території Донецької області. *Допов. Нац. акад. наук Ukr.* 2017. № 6. С. 51–57. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovid2017.06.051>
3. NOAA: National Centers for Environmental Information. URL: <https://ngdc.noaa.gov/eog/index.html>
4. Народне господарство України у [1991–1993] році: стат. щорічник. Самченко В.В. (ред.). Київ: Техніка, 1992. 1994.
5. Державна служба статистики України. URL: <http://www.ukrstat.gov.ua>
6. Савин И.Ю., Статакис Д., Докукин П.А. Спутниковые данные о ночной освещенности как индикаторе общего социально-экономического развития регионов России. Совр. пробл. ДЗЗ из космоса. 2017. 14, № 6. С. 210–221.

7. Elvidge C.D., Baugh K.E., Dietz J.B., Bland T., Sutton P.C., Kroehl H.W. Radiance calibration of DMSP-OLS low-light imaging data of human settlements. *Remote Sens. Environ.* 1999. **68**, № 1. P. 77–88.
8. Fan J., Ma T., Zhou C., Zhou Y., Xu T. Comparative estimation of urban development in China's cities using socioeconomic and DMSP/OLS night light data. *Remote Sens.* 2014. **6**, № 8. P. 7840–7856.
9. Gao B., Huang Q., He C., Ma Q. Dynamics of urbanization levels in China from 1992 to 2012: perspective from DMSP/OLS night time light data. *Remote Sens.* 2015. **7**, № 2. P. 1721–1735.
10. Кушнірь О.В. Розробка методики определения плотности населения по ночных снимкам DMSP OLS. *Ізв. ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка*. 2014. № 1. С. 66–70.
11. Elvidge C.D., Erwin E.H., Baugh K.E., Ziskin D., Tuttle B.T., Ghosh T., Sutton P.C. Overview of DMSP night time lights and future possibilities. Urban Remote Sens. Joint Event. 2009. 3 Vols. Proceedings of a meeting held 20–22 May 2009, Shanghai, China. Curran Associates, Inc. 5 p. doi: <https://doi.org/10.1109/URS.2009.5137749>
12. Національний банк України. URL: <https://bank.gov.ua/control/uk/index>

Надійшло до редакції 27.03.2018

## REFERENCES

1. Lyalko, V. I., Sakhatsky, A. I., Apostolov, A. A. & Elistratova, L. A. (2017). Application of products from NPP/VIIRS satellite images at night for assessment of the economic crisis in the East of Ukraine (the Donetsk and Luhansk regions). *Visn. Nac. Acad. nauk Ukr.*, No. 2, pp. 48-53 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/viisn2017.02.048>
2. Lyalko, V. I., Elistratova, L. A. & Apostolov, A. A. (2017). The estimation of cultivated areas under winter crops by Landsat survey data over the Donetsk region. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 6, pp. 51-57 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.051>
3. NOAA: National Centers for Environmental Information. Retrieved from <https://ngdc.noaa.gov/eog/index.html>
4. People's economy of Ukraine [1991-1993] (1992-1994): Statistical Yearbook. Samchenko V.V. (Ed.). Kiev: Technics (in Ukrainian).
5. State Statistics Service of Ukraine. Retrieved from <http://www.ukrstat.gov.ua>
6. Savin, I. Yu., Stathakis, D. & Dokunin, P. A. (2017). Satellite based night lights data as an indicator of general socio-economic development of regions of Russia. *Sovr. Probl. DZZ Kosm.* 14, No. 6, pp. 210-221 (in Russian).
7. Elvidge, C. D., Baugh, K. E., Dietz, J. B., Bland, T., Sutton, P. C. & Kroehl, H. W. (1999). Radiance calibration of DMSP-OLS low-light imaging data of human settlements. *Remote Sens. Environ.*, 68, No. 1, pp. 77-88.
8. Fan, J., Ma, T., Zhou, C., Zhou, Y. & Xu, T. (2014). Comparative estimation of urban development in China's cities using socioeconomic and DMSP/OLS night light data. *Remote Sens.*, 6, No. 8, pp. 7840-7856.
9. Gao, B., Huang, Q., He, C. & Ma, Q. (2015). Dynamics of urbanization levels in China from 1992 to 2012: perspective from DMSP/OLS night time light data. *Remote Sens.*, 7, No. 2, pp. 1721-1735.
10. Kushnir, O. V. (2014). Development of the methodology for determining population density by night images DMSP OLS . *Izv. VUZov. Geodeziya i aerofotos'emka*, No. 1, pp. 66-70.
11. Elvidge, C. D., Erwin, E. H., Baugh, K. E., Ziskin, D., Tuttle, B. T., Ghosh, T. & Sutton, P. C. (2009). Overview of DMSP night time lights and future possibilities. Urban Remote Sens. Joint Event. 3 Vols. Proceedings of a meeting held 20-22 May 2009, Shanghai, China (5 pp). Curran Associates, Inc. doi: <https://doi.org/10.1109/URS.2009.5137749>
12. National Bank of Ukraine. Retrieved from <https://bank.gov.ua/control/uk/index>

Received 27.03.2018

*В.І. Лялько, Л.А. Елістратова,  
А.А. Апостолов, А.Я. Ходоровский*

ГУ “Научный центр аэрокосмических исследований Земли  
Института геологических наук НАН Украины”, Киев  
E-mail: alex@casre.kiev.ua

**ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ И ИЗМЕНЕНИЙ ОБЩЕГО  
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ УКРАИНЫ  
В ТЕЧЕНИЕ 1992–2012 ГОДОВ НА ОСНОВАНИИ МАТЕРИАЛОВ  
СЪЕМОК КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА DMSP/OLS (США)  
О НОЧНОЙ ОСВЕЩЕННОСТИ ТЕРРИТОРИИ**

Проведена корреляционная оценка изменений основных социально-экономических показателей Украины с данными анализа интенсивности ночной освещенности по материалам съемок космическим аппаратом DMSP/OLS. Использовался архив спутниковых снимков за 1992–2012 гг. и статистические данные о количестве городского и сельского населения, валового регионального продукта за этот период. Установлено, что спутниковые данные о ночной освещенности территории со спутника DMSP/OLS имеют корреляцию с показателями, характеризирующими социально-экономическое состояние страны, и могут быть использованы в качестве независимого дистанционного мониторинга социально-экономического развития Украины.

**Ключевые слова:** *ночная освещенность, DMSP/OLS, количество населения, региональный валовой продукт, Украина.*

*V.I. Lyalko, L.A. Elistratova,  
A.A. Apostolov, A.Ya. Khodorovsky*

Scientific Center for Aerospace Research of the Earth,  
Institute of Geological Sciences of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: alex@casre.kiev.ua

**THE CONDITION AND CHANGES ASSESSMENT  
OF GENERAL SOCIO-ECONOMIC DEVELOPMENT OF UKRAINE  
BETWEEN 1992 AND 2012 ON THE BASIS OF SPACECRAFT SURVEY MATERIALS  
DMSP/OLS (USA) ABOUT THE NIGHT LIGHTENING OF THE TERRITORY**

We performed the correlation assessment of the changes for main socio-economical factors of Ukraine with the analysis of intensity of night lightening within spacecraft survey DMSP/OLS data. The archive of satellite imagery and statistical data on the urban and rural population numbers and on the gross regional product between 1992 and 2012 were used. We established that satellite data on the night lightening of the territory form the DMSP/OLI satellite are correlating with indicators that characterize the socio-economical condition of the country, and can be used in case of independent remote monitoring of the socio-economical development of Ukraine.

**Keywords:** *night lightening, DMSP/OLI, population number, regional gross product, Ukraine.*

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.087>

УДК 541.132.3+541.135.6+541.49+546.98

**В.Н. Никитенко, В.С. Кублановский**

Институт общей и неорганической химии им. В.И. Вернадского НАН Украины, Киев

E-mail: kublan@ukr.net

## **Массоперенос при электрохимическом восстановлении палладия(II) из глицинатного электролита**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.А. Омельчуком*

*В рамках теории Нернста рассчитаны ионный состав глицинатного электролита палладирования в объеме раствора, прикатодном слое, концентрационная поляризация и подщелачивание прикатодного слоя в зависимости от плотности поляризующего тока, соотношения основных компонентов и  $pH_0$  в объеме раствора. Установлены основные формы существования ионов палладия(II) и лиганда в прикатодном слое глицинатного электролита. Показано, что в реакции перехода принимают участие электрохимически активные комплексы  $[Pd(gly)_2]L$ . Восстановление палладия(II) из глицинатного электролита описывается закономерностями смешанной кинетики. Предложен механизм электровосстановления палладия(II) из глицинатного электролита.*

**Ключевые слова:** глицинатные комплексы палладия(II), массоперенос, ионный состав электролита, прикатодный слой, концентрационная поляризация, механизм электровосстановления.

Высокая катализическая активность палладия, уникальные физико-химические и функциональные свойства палладиевых покрытий обусловливают их широкое использование на практике. В микроэлектронике и нанотехнике для нанесения функциональных покрытий палладием и его сплавами широко используются электролиты на основе комплексонов, поскольку они нетоксичны, устойчивы и легко утилизируются. Комплексоны — полидентатные лиганды ацидного типа образуют широкий спектр комплексных соединений практически со всеми ионами металлов, характеризующихся высокой прочностью химических связей вследствие их циклического строения. Комплексоны имеют также ярко выраженную способность к совместимости с лигандаами слабого поля в одной координационной сфере полилигандного комплекса.

Критерии научного подхода к выбору лигандов для комплексных, в том числе и полилигандных, электролитов и условия их совместимости в одной координационной сфере при образовании разнолигандных комплексных соединений сформулированы в [1]. Сочетание правильно выбранных лигандов для полилигандных электролитов позволяет управ-

лять торможением электродного процесса или отдельных его стадий и, следовательно, структурой и свойствами получаемых покрытий [1–3]. Преимуществом полилигандных электролитов является высокая буферная емкость и, соответственно, незначительное подщелачивание прикатодного слоя при длительной их эксплуатации.

В качестве объекта исследования выбран глицинатный электролит палладирования, поскольку он представляет не только научный [2, 3], но и практический [3] интерес. Практическое использование глицинатного электролита палладирования невозможно без достоверных сведений об ионном составе электролита, массопереносе, составе электрохимически активных комплексов (ЭАК), природе лимитирующих стадий, кинетике и механизме процесса.

Цель работы — изучение состояния ионов палладия(II) в глицинатном растворе, не содержащем избытка свободного лиганда, в объеме электролита и прикатодном слое, разработка и оптимизация перспективного комплексонатного электролита палладирования для нанесения функциональных покрытий, пригодных для использования в микроэлектронике.

Массоперенос исследовали в глицинатном электролите палладирования, содержащем незначительный избыток свободного лиганда, поскольку последний является промотором наводораживания, а его полное отсутствие в электролите приводит к ухудшению качества получаемых покрытий. Как показано в работе [4], изучение электроосаждения металлов из комплексных соединений в электролитах, содержащих незначительный избыток свободного лиганда, имеет свои особенности, обусловленные тем, что состав прикатодного слоя в данном случае зависит от плотности поляризующего тока иначе, чем при большом избытке свободного лиганда.

**Теоретическая часть.** Процессы, происходящие в системе палладий(II) — глицин ( $\text{Hgly}$ ) — вода, не содержащей избытка свободного лиганда\* ( $[\text{Pd}(\text{gly})_2]$  —  $\text{NaClO}_4$  —  $\text{H}_2\text{O}$ ), при протекании электрического тока и в его отсутствие, можно представить в виде графа (рис. 1). Из графа видны равновесия, имеющие место в данной системе, и возможные пути выделения металла и водорода, а также подщелачивания прикатодного слоя.

На основании равновесий, протекающих в глицинатном электролите палладирования, и их констант ( $\lg\beta_1 = 15,25$ ;  $\lg\beta_2 = 27,50$ ;  $\lg\beta_3 = 32,20$ ;  $\lg\beta_4 = 36,52$ ;  $\lg K_1 = 9,83$ ;  $\lg K_2 = 12,26$ ) [5] с учетом материального баланса по ионам палладия(II), лиганда и водорода рассчитаны ионный состав глицинатного электролита палладирования в объеме раствора, прикатодном слое и диффузионная поляризация в зависимости от плотности поляризующего тока, соотношения основных компонентов  $C_{\text{Pd}^{2+}}/C_{\text{gly}^-}$  и  $\text{pH}_0$  в объеме раствора. Получены данные об условиях образования и областях существования всего спектра глицинатных комплексов палладия(II) и протонированных форм лиганда.

В рамках теории Нернста составлена система дифференциальных уравнений, описывающих диффузию и миграцию ионов в глицинатном электролите палладирования, не содержащем избытка свободного лиганда.

В условиях стационарного состояния системы уравнение общего переноса тока по металлу по нормали к поверхности электрода, как видно из графа (см. рис. 1), имеет вид

---

\* В глицинатном электролите палладирования, приготовленном из диглицинатного комплекса палладия(II), т. е. без избытка свободного лиганда, существуют лишь комплексы  $[\text{Pdgly}]^+$  и  $[\text{Pd}(\text{gly})_2]$ .

$$\sum_{i=0}^{i=4} D_i \frac{\partial [\text{Pd(gly)}_i]}{\partial x}^{2-i} + \frac{F}{RT} \frac{\partial E}{\partial x} \left\{ \sum_{i=0}^{i=4} (2-i) D_i [\text{Pd(gly)}_i]^{2-i} \right\} = \frac{j_{\text{Pd}}}{2F}, \quad (1)$$

а перенос тока по водороду –

$$D_{\text{H}^+} \frac{\partial [\text{H}]^+}{\partial x} - D_{\text{OH}^-} \frac{\partial [\text{OH}]^-}{\partial x} + \sum_{i=1}^{i=2} i D_i \frac{\partial [\text{H}_i \text{gly}]^{i-1}}{\partial x} + \frac{F}{RT} \frac{\partial E}{\partial x} \times \\ \times \left\{ D_{\text{H}^+} [\text{H}]^+ - D_{\text{OH}^-} [\text{OH}]^- + \sum_{i=1}^{i=2} (i-1) D_i [\text{H}_i \text{gly}]^{i-1} \right\} = \frac{j_{\text{H}}}{F}. \quad (2)$$

Для ионов лиганда и индифферентного электролита, которые не переходят границу раздела фаз металл – электролит, явления переноса вещества, обусловленные диффузией и миграцией ионов в электрическом поле, компенсируют друг друга, т. е. диффузионный и миграционный потоки равны и противоположны по знаку

$$\sum_{i=0}^{i=2} D_i \frac{\partial [\text{H}_i \text{gly}]^{i-1}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{i=2} i D_i \frac{\partial [\text{Pd(gly)}_i]}{\partial x}^{2-i} + \frac{F}{RT} \frac{\partial E}{\partial x} \times \\ \times \left\{ \sum_{i=1}^{i=2} (2-i) D_i [\text{Pd(gly)}_i]^{2-i} + \sum_{j=0}^{j=2} (i-1) D_i [\text{H}_i \text{gly}]^{i-1} \right\} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial [\text{Na}]^+}{\partial x} + \frac{F}{RT} \frac{\partial E}{\partial x} [\text{Na}]^+ = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial [\text{ClO}_4]^-}{\partial x} - \frac{F}{RT} \frac{\partial E}{\partial x} [\text{ClO}_4]^- = 0. \quad (5)$$

Здесь  $D_i$  – коэффициент диффузии  $i$ -го иона;  $E(x)$  – электрический потенциал;  $x$  – расстояние от поверхности электрода;  $j_{\text{Pd}}$  и  $j_{\text{H}}$  – токи разряда ионов палладия(II) и водорода соответственно. Остальные обозначения общепринятые.

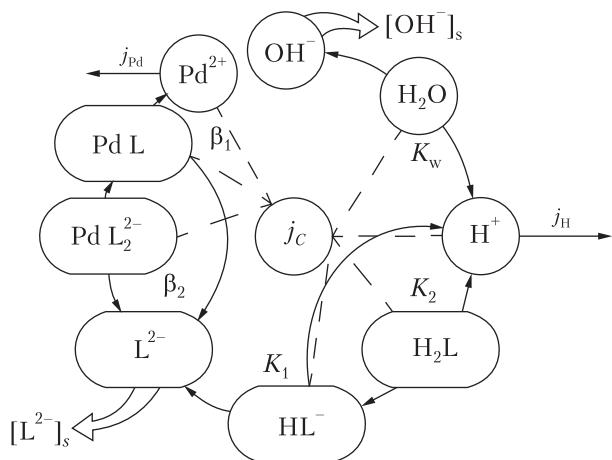
Система уравнений (1)–(5), дополненная соответствующими константами равновесий (см. граф), условием электронейтральности в объеме раствора

$$\sum z_i C_i = 0 \quad (6)$$

и ионным произведением воды

$$[\text{H}]^+ \cdot [\text{OH}]^- = K_w, \quad (7)$$

описывает изменение концентраций всех форм ионов, присутствующих в глицинатном электролите палладирования. Система уравнений (1)–(7) численно проинтегрирована методом Рунге–Кутта [6] и решена с помощью вычислительного эксперимента на ПК при следующих граничных условиях:  $[C_i]_{x=\delta} = [C_i]^0$ ;  $[C_i]_{x=0} = [C_i]^s$ , где  $[C_i]^0$  и  $[C_i]^s$  – концентрации  $i$ -го компонента в объеме электролита и на поверхности электрода соответственно. При ин-



**Рис. 1.** Граф, иллюстрирующий процессы и равновесия, протекающие в объеме раствора и прикатодном слое при электрохимическом выделении палладия(II) из глицинатного электролита

тегрировании учитывалось, что толщина диффузационного слоя  $\delta$  при естественной конвекции зависит от плотности поляризующего тока  $\delta = \delta_0 j^{-0.2}$  [7].

Исходные данные для расчета при 25 °C следующие:  $C_{\text{Pd}^{2+}} = 0,005$ ;  $C_{\text{gly}^-} = 0,010$ ;  $C_{\text{NaClO}_4} = 1,0$  моль/л;  $\text{pH}_0$  5,8–9,5;  $D_{\text{H}^+} = 8,6 \cdot 10^{-7}$  дм<sup>2</sup>/с;  $D_{\text{OH}^-} = 4,9 \cdot 10^{-7}$  дм<sup>2</sup>/с [8];  $D_i = 4,70 \cdot 10^{-8}$  дм<sup>2</sup>/с;  $5,12 \cdot 10^{-8}$  дм<sup>2</sup>/с при

$\text{pH}_0$  5,8–7,2 и 9,5 соответственно [9];  $K_w = 1,0 \cdot 10^{-14}$  [10];  $0 \leq j_{\text{Pd}} \leq 0,030$  А/дм<sup>2</sup>. Толщина диффузационного слоя, вычисленная из экспериментальной зависимости величины предельного диффузионного тока от объемной концентрации восстановленных ионов  $\delta_0 = (nFD_i C_{\text{Pd}^{2+}})/j_d$  [11], равна  $2 \cdot 10^{-3}$  дм.

**Обсуждение результатов.** Диаграмма распределения форм существования ионов палладия(II) и лиганда в объеме глицинатного электролита палладирования при равновесном потенциале в зависимости от равновесной концентрации лиганда представлена на рис. 2.

Согласно полученным результатам, аквакомплексы палладия(II)  $[\text{Pd}(\text{H}_2\text{O})_4]^{2+}$  в значительных количествах присутствуют в глицинатном электролите при концентрации свободного лиганда  $[\text{gly}^-] < 10^{-13}$  моль/л (см. рис. 2). Комплексообразование в исследуемой системе наблюдается при концентрации свободного лиганда  $[\text{gly}^-] \geq 10^{-17}$  моль/л. При увеличении концентрации лиганда  $[\text{gly}^-]$  и повышении  $\text{pH}_0$  раствора возрастает степень образования глицинатных комплексов палладия(II). Концентрация комплексов  $[\text{Pd}(\text{gly})_2]$  повышается монотонно, а кривая зависимости концентрации комплексных ионов  $[\text{Pdgly}]^+$  проходит через максимум, положение которого зависит от соотношения основных компонентов  $C_{\text{Pd}^{2+}}/C_{\text{gly}^-}$  и  $\text{pH}_0$  в объеме исследуемого электролита. Диглицинатные комплексы  $[\text{Pd}(\text{gly})_2]$  преобладают в электролите при концентрации свободного лиганда  $[\text{gly}^-] \geq 10^{-10}$  моль/л.

В глицинатном электролите, приготовленном из диглицинатного комплекса палладия(II), т. е. не содержащем избытка свободного лиганда, в области  $\text{pH}_0$  5,8–9,5 (см. рис. 2, а) преобладающей формой существования ионов палладия(II) являются комплексы  $[\text{Pd}(\text{gly})_2]$ , а лиганда — и ионы  $\text{gly}^-$  и протонированная форма  $\text{Hgly}$ . Основными формами существования ионов палладия(II) и лиганда в щелочном глицинатном электролите ( $\text{pH}_0$  9,5), содержащем избыток свободного лиганда, являются комплексы  $[\text{Pd}(\text{gly})_4]^{2-}$  (см. рис. 2, б), ионы  $\text{gly}^-$ . Соотношение форм существования ионов металла и лиганда внутри диффузационного слоя определяет кинетику и механизм восстановления палладия(II) из глицинатного электролита, что согласуется с данными [3].

Вычисленные значения концентраций основных компонентов глицинатного электролита палладирования на поверхности электрода в зависимости от плотности тока, протекающего через исследуемую систему, в области  $\text{pH}_0$  5,8–9,5 представлены на рис. 3, а. Основными формами существования ионов палладия(II) в прикатодном слое глицинатного элек-

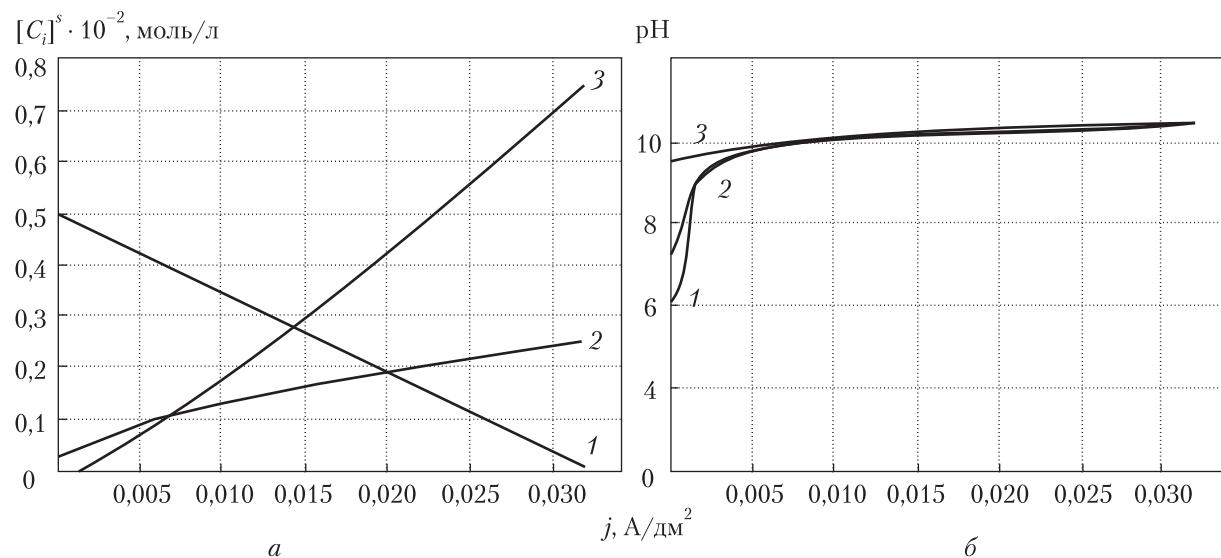
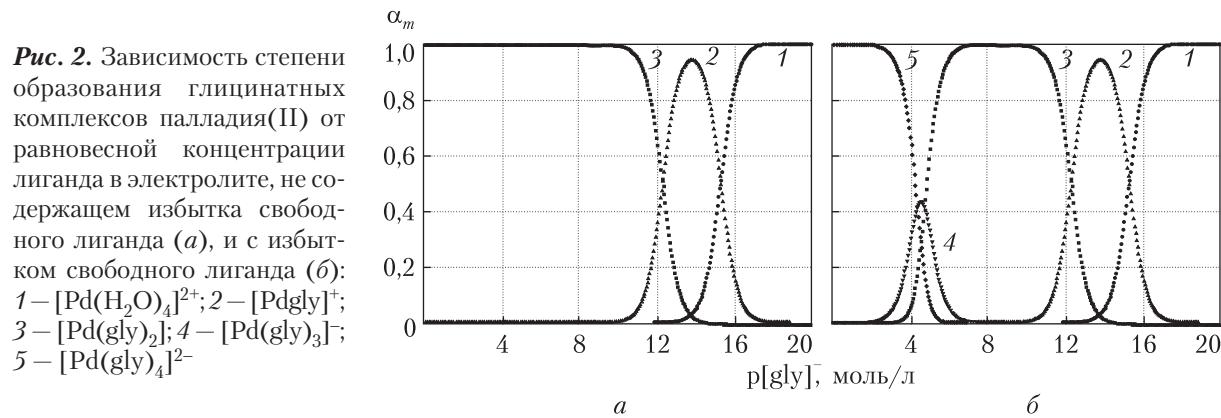
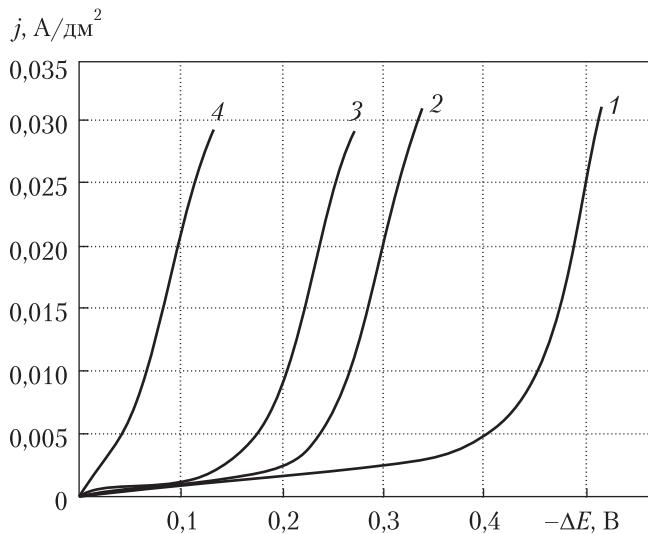


Рис. 3. Зависимость концентраций ионов  $[Pd(gly)_2]$  (1);  $Hgly^-$  (2);  $gly$  (3) (а) и  $pH_s$  на поверхности электрода (б) от плотности тока в глицинатном электролите состава, моль л:  $[Pd(gly)_2] = 0,005$ ;  $[Hgly] = 0,010$ ;  $NaClO_4 = 1,0$ ;  $pH_0$ : 5,8 (1); 7,2 (2) и 9,5 (3)

тролита, не содержащего избытка свободного лиганда, в области  $pH_0$  5,8–9,5 являются комплексы  $[Pd(gly)_2]$  (см. рис. 3, а, кривая 1), а лиганда – ионы  $gly^-$  (кривая 3) и протонированная форма лиганда  $Hgly$  (кривая 2).

Значения поверхностной концентрации комплексов  $[Pd(gly)_2]$  (кривая 1) практически не зависят от  $pH$  электролита, а определяются лишь плотности поляризующего тока, проекающего через исследуемую систему. Значения поверхностной концентрации комплексов  $[Pdgly]^+$  практически равны нулю. При достижении предельного катодного тока поверхностная концентрация комплексов  $[Pd(gly)_2]$  падает до нулевого значения. Поверхностная концентрация лиганда  $[gly^-]$  увеличивается по сравнению с его равновесной концентрацией в объеме электролита. Содержание протонированной формы лиганда глицина  $[Hgly]$  в прикатодном слое незначительно возрастает с повышением плотности поляризующего тока.

Как показывают результаты расчетов, поверхностные концентрации металлокомплексов, содержащих формы  $[Pd(H_2O)_4]^{2+}$  и  $[Pdgly]^+$  незначительны и в большей степени зависят от обоих



**Рис. 4.** Вычисленные кривые концентрационной поляризации (2–4) и экспериментальная поляризационная кривая (1) в глицинатном электролите состава, моль/л:  $[Pd(gly)_2] = 0,05$ ;  $[Hgly] = 0,010$ ;  $NaClO_4 = 1,0$ ;  $pH_0$  5,8 (1, 2); 7,2 (3); 9,5 (4)

факторов. Следовательно, скорость восстановления палладия(II) из глицинатного электролита, не содержащего избытка свободного лиганда, предопределяется поверхностной концентрацией комплексов  $[Pd(gly)_2]$ , лимитируется диффузией восстанавливающихся ионов к поверхности электрода и реакцией перехода, что согласуется с экспериментальными данными [3].

Зависимости  $pH_s$  на поверхности электрода от плотности поляризующего тока в глицинатном электролите палладирования представлены на рис. 3, б.  $pH_s$  прикатодного слоя, как следует из рисунка, повышается с увеличением плотности поляризующего тока и  $pH_0$  в объеме раствора. Повышение  $pH_0$  в объеме глицинатного электролита с 5,8 до 9,5 практически не влияет на величину  $pH_s$  прикатодного слоя, которая определяется лишь плотностью поляризующего тока. Максимальное значение  $pH_s$  прикатодного слоя в глицинатном электролите палладирования не превышает 10. Использование глицинатного электролита палладирования с более высокими значениями  $pH_s$  прикатодного слоя нецелесообразно, поскольку в данном случае возможно образование гидроокиси  $Pd(OH)_2$  ( $\Pi_{Pd(OH)_2} = 1 \cdot 10^{-24}$  [10]).

Эти данные согласуются с аналогичными результатами, полученными при изучении массопереноса в глицинатном [12], иминодиацетатном [13] электролитах кадмирования, а также при экспериментальном исследовании приэлектродных слоев при электрохимическом выделении кадмия(II) из трилонатного электролита с помощью микростеклянного и вращающегося дискового электродов [14]. По мнению авторов [14], определяющее влияние на величину  $pH_s$  прикатодного слоя оказывает буферность исследуемого раствора [15], которая в значительной степени зависит от соотношения концентраций свободного лиганда  $[gly^-]$  и его протонированных форм  $[Hgly]$  в прикатодном слое. Данное обстоятельство необходимо принимать во внимание при разработке оптимального состава глицинатного электролита палладирования и режима электролиза.

Вычисленные и экспериментальные зависимости концентрационной поляризации на поверхности электрода при электрохимическом восстановлении палладия(II) из глицинатного электролита представлены на рис. 4. Концентрационная поляризация существенно зависит от  $pH_0$  в объеме раствора и плотности поляризующего тока. Наибольшее значение перенапряжения наблюдается в глицинатном электролите палладирования при  $pH_0$  5,8. На величину концентрационной поляризации в глицинатном электролите палладирования влияет ряд факторов: плотность поляризующего тока, концентрация комплексов палладия(II), лиганда на поверхности электрода, в объеме электролита и  $pH_0$  раствора.

Уменьшение концентрационной поляризации при увеличении рН<sub>0</sub> исследуемого раствора от 5,8 до 9,5, согласно данным расчетов, можно объяснить тем, что в этом случае катодный процесс вызывает меньшие относительные изменения отношения [Pd]<sub>s</sub><sup>2+</sup>/[Pd]<sub>0</sub><sup>2+</sup> поверхностной и объемной концентраций потенциалопределяющих ионов.

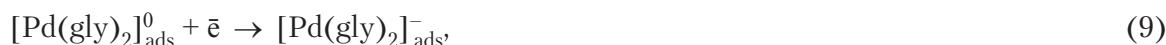
Расхождение между вычисленной кривой концентрационной поляризации (см. рис. 4, кривая 2) и экспериментальной поляризационной кривой (1) свидетельствует о том, что восстановление палладия(II) из глицинатного электролита описывается закономерностями смешанной кинетики.

Электровосстановление *транс*- и *цис*-диглицинатных комплексов палладия(II) из электролита, не содержащего избытка свободного лиганда, в интервале рН<sub>0</sub> 3,4–9,5 исследовано раньше [2, 9].

Порядок электрохимической реакции по ионам водорода при восстановлении палладия(II) из глицинатного электролита, не содержащего избытка лиганда, вычисленный по уравнению Феттера, равен нулю [3]. Порядок электродной реакции по ионам лиганда определить в глицинатном электролите состава 1:1  $\leq C_{\text{Pd}^{2+}}/C_{\text{Hgly}}$   $\leq 1:2$  не представляется возможным вследствие недоступности его экспериментального приготовления.

Среднее координационное число комплексных ионов, преобладающих в объеме глицинатного электролита, не содержащего избытка свободного лиганда, в области рН 3,4–9,5, рассчитанное по методу Ледена, равно 2 [3]. В реакции перехода принимают участие электрохимически активные комплексы [Pd(gly)<sub>2</sub>]. Поскольку комплексы [Pd(gly)<sub>2</sub>] преобладают в объеме и прикатодном слое глицинатного электролита, то, следовательно, электродный процесс в данном случае не осложнен кинетическими явлениями в объеме электролита. Скорость электродного процесса описывается закономерностями смешанной кинетики, что согласуется с данными [2, 3].

Учитывая порядки электродной реакции по ионам водорода и комплексным ионам, вероятный механизм электрохимического восстановления палладия(II) из глицинатного электролита, не содержащего избытка свободного лиганда, в области рН 3,4–9,5 можно представить схемой [2, 3]:



Отсутствие предшествующих химических реакций отщепления внутрисферных лигандов при электрохимическом восстановлении хелатных диглицинатных комплексов палладия(II) обусловлено, по мнению авторов [3], их инертностью.

Таким образом, рассчитаны ионный состав глицинатного электролита палладирования, не содержащего избытка свободного лиганда, в объеме раствора и прикатодном слое, концентрационная поляризация и подщелачивание прикатодного слоя в зависимости от плотности поляризующего тока и рН<sub>0</sub> в объеме раствора при соотношении основных компонен-

тов  $C_{\text{Pd}^{2+}}/C_{\text{gly}^-}$ , равном 1 : 2. Установлено, что преобладающими формами существования ионов палладия(II) и лиганда в прикатодном слое глицинатного электролита, не содержащего избытка свободного лиганда, в области  $\text{pH}_0$  3,4–9,5 являются комплексы  $[\text{Pd}(\text{gly})_2]$ , ионы  $\text{gly}^-$  и протонированная форма лиганда  $\text{Hgly}$  соответственно. Показано, что в реакции перехода принимают участие электрохимически активные комплексы  $[\text{Pd}(\text{gly})_2]$ . Восстановление палладия(II) из глицинатного электролита описывается закономерностями смешанной кинетики. Предложен механизм процесса восстановления палладия(II) из глицинатного электролита.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Орехова В.В., Андрющенко Ф.К. Полилигандные электролиты в гальванистегии. Харьков: Вища шк., 1979. 144 с.
2. Kublanovsky V.S., Nikitenko V.N. Electrochemical properties of palladium(II) *trans*- and *cis*-diglycinate complexes. *Electrochim. Acta*. 2011. **56**. P. 2110–2115. doi: <https://doi.org/10.1016/j.electacta.2010.11.028>
3. Kyblanovsky V.S., Nikitenko V.N. Mechanism of the electrodeposition of palladium coatings from glycinate electrolytes. *J. Electroanal. Chem.* 2013. **699**. P. 14–20. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jelechem.2013.03.021>
4. Бек Р.Ю. Особенности электроосаждения металлов из растворов с малым избытком лиганда. *Изв. Сиб. отд. АН СССР. Сер. хим. н.* 1977. **3**, № 7. С. 68–76.
5. Кублановский В.С., Никитенко В.Н., Чорненька Н.В. Спектрофотометрическое и pH-потенциометрическое определение констант устойчивости глицинатных комплексов палладия(II). *Укр. хим. журн.* 2009. № 9. С. 50–56.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1965. 697 с.
7. Ibl N., Barrada Y., Trumpler G. Natural convection during electrolysis: interferometric studies of diffusion layer. *Helv. Chim. Acta*. 1954. **37**. P. 583–597.
8. Бретшнейдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. Москва; Ленинград: Химия, 1966. 536 с.
9. Чорненька Н.В., Никитенко В.Н. Синтез, идентификация, изомеризация и электрохимические свойства *транс*- и *цис*-диглицинатных комплексов палладия(II). *Укр. хим. журн.* 2006. **72**, № 1. С. 48–52.
10. Справочник химика. Т.3. Химическое равновесие и кинетика. Свойства растворов. Электродные процессы. Москва; Ленинград: Химия, 1965. 1008 с.
11. Дамаскин Б.Б., Петрий О.А., Щирлина Г.А. Электрохимия. Москва: Химия, 2006. 672 с.
12. Никитенко В.Н., Литовченко К.И., Кублановский В.С. Расчет ионного состава и концентрационной поляризации на поверхности электрода при электроосаждении кадмия(II) из  $\alpha$ -аминоуксусных растворов. *Укр. хим. журн.* 1981. **47**, № 4. С. 339–344.
13. Никитенко В.Н., Литовченко К.И., Кублановский В.С. Концентрационные изменения в диффузионном слое при восстановлении кадмия(II) из иминодиацетатного электролита. *Электрохимия*. 1998. **34**, № 5. С. 467–491.
14. Кублановский В.С., Городынский А.В., Белинский В.Н., Глуцак Т.С. Концентрационные изменения в приэлектродных слоях в процессе электролиза. Киев: Наук. думка, 1978. 212 с.
15. Пршибил Р. Комплексоны в химическом анализе. Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. 580 с.

Поступило в редакцию 29.05.2018

## REFERENCES

1. Orekhova, V. V. & Andryushchenko, F. K. (1979). Polyligand electrolytes plating. Khar'kov: Vishcha shkola (in Russian).
2. Kublanovsky, V. S. & Nikitenko, V. N. (2011). Electrochemical properties of palladium(II) *trans*- and *cis*-diglycinate complexes. *Electrochim. Acta*, 56, pp. 2110-2115. doi: <https://doi.org/10.1016/j.electacta.2010.11.028>

3. Kyblanovsky, V. S. & Nikitenko, V. N. (2013). Mechanism of the electrodeposition of palladium coatings from glycinate electrolytes. J. Electroanal. Chem., 699, pp. 14-20. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jelechem.2013.03.021>
4. Bek, R. Yu. (1977). Peculiarities of the electrodeposition of metals from solutions with a small excess of ligand. Izv. Sib. otd. AN SSSR. Ser. him. nauk, No. 3, pp. 68-76 (in Russian).
5. Kyblanovsky, V. S., Nikitenko, V. N. & Chornenka, N. V. (2009). Spectrophotometric and pH-potentiometric determination of the stability constants of palladium(II) glycinate complexes. Ukr. Khim. Zhurn., 75, No. 9, pp. 50-56 (in Russian).
6. Kamke, E. (1965). Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).
7. Ibl, N., Barrada, Y. & Trumpler, G. (1954). Natural convection during electrolysis: interferometric studies of diffusion layer. Helv. Chim. Acta, 37, pp. 583-597.
8. Bretshneider, S. (1966). Properties of gases and liquids. Engineering calculation methods. Moscow, Leningrad: Khimiya (in Russian).
9. Chornenka, N. V. & Nikitenko, V. N. (2006). Synthesis, identification, isomerization and electrochemical properties of *trans*- and *cis*-diglycinate complexes of palladium(II). Ukr. khim. zhurn., 72, No. 1, pp. 48-52 (in Russian).
10. Chemical handbook (1965). Vol. 3. Chemical equilibrium and kinetics. Properties of solutions. Electrode processes. Moscow, Leningrad: Khimiya (in Russian).
11. Damaskin, B. B., Petrii, O. A. & Tsyrllina, G. A. (2006). Electrochemistry. Moscow: Khimiya (in Russian).
12. Nikitenko, V. N., Litovchenko, K. I. & Kublanovsky, V. S. (1981). Calculation of ionic composition and concentration polarization on the electrode surface in cadmium(II) electrodeposition from  $\alpha$ -aminoacetic solutions. Ukr. khim. zhurn., 47, No. 4, pp. 339-344 (in Russian).
13. Nikitenko, V. N., Litovchenko, K. I., Kublanovsky, V. S. (1998). Concentration changes in the diffusion layer during the reduction of cadmium(II) from an iminodiacetate electrolyte. Elektrochimiya, 34, No. 5, pp. 487-491 (in Russian).
14. Kublanovsky, V. S., Gorodyskii, A. V., Belinskii, V. N. & Gluschak, T. S. (1978). Concentration changes in the near-electrode layers during electrolysis. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
15. Prshibil, R. (1960). Complexones in chemical analysis. Moscow: Izd-vo inostr. lit. (in Russian).

Received 29.05.2018

B.M. Нікітенко, В.С. Кублановський

Інститут загальної та неорганічної хімії ім. В.І. Вернадського НАН України, Київ  
E-mail: kublan@ukr.net

## МАСОПЕРЕНОС ПРИ ЕЛЕКТРОХІМІЧНОМУ ВІДНОВЛЕННІ ПАЛАДІЮ(ІІ) З ГЛІЦИНАТНОГО ЕЛЕКТРОЛІТУ

У рамках теорії Нернста розраховано іонний склад гліцинатного електроліту паладіювання в об'ємі розчину, прикатодному шарі, концентраційну поляризацію та підлужнення прикатодного шару залежно від густини поляризуючого струму, співвідношення основних компонентів і pH<sub>0</sub> в об'ємі розчину. Встановлено основні форми існування іонів паладію(ІІ) і ліганду в прикатодному шарі гліцинатного електроліту. Показано, що в реакції переходу беруть участь електрохімічно активні комплекси [Pd(gly)<sub>2</sub>]. Відновлення паладію(ІІ) з гліцинатного електроліту описується закономірностями змішаної кінетики. Запропоновано механізм електровідновлення паладію(ІІ) з гліцинатного електроліту.

**Ключові слова:** гліцинатні комплекси паладію(ІІ), масоперенос, іонний склад електроліту, прикатодний шар, дифузійна поляризація, механізм електровідновлення.

V.N. Nikitenko, V.S. Kublanovsky

V.I. Vernadskii Institute of General and Inorganic Chemistry of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: kublan@ukr.net

## MASS TRANSFER IN THE ELECTROCHEMICAL REDUCTION OF PALLADIUM(II) FROM A GLYCINATE ELECTROLYTE

The ionic composition of a glycinate electrolyte of palladation in the solution volume and in the near-cathode layer, concentration polarization, and alkalinization of the near-cathode layer are calculated within the framework of the Nernst theory, depending on the density of the polarizing current, ratio of main components, and  $\text{pH}_0$  in the solution volume. The basic forms of existence of palladium(II) ions and the ligand in the near-cathode layer of a glycinate electrolyte are found. It is shown that the electrochemically active complexes  $[\text{Pd}(\text{gly})_2]$  participate in the transition reaction. The reduction of palladium(II) from a glycinate electrolyte is described by the laws of mixed kinetics. The mechanism of electroreduction of palladium(II) from a glycinate electrolyte is proposed.

**Keywords:** glycinate complexes of palladium(II), mass transfer, ionic composition of an electrolyte, near-cathode layer, concentration polarization, mechanism of electroreduction.

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.097>

УДК 606:615.322:631:871

**Н.П. Веденичева, Г.А. Аль-Маали,  
Н.А. Бисько, Н.Н. Щербатюк, И.В. Косаковская**

Институт ботаники им. Н.Г. Холодного НАН Украины, Киев  
E-mail: vedenicheva@ukr.net

## **Особенности роста и содержание эндогенных цитокининов в мицелиальной биомассе базидиевых грибов *Hericium coralloides* и *Fomitopsis officinalis* в культуре *in vitro***

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Е.Л. Кордюм*

*Проанализированы динамика роста и особенности аккумуляции эндогенных цитокининов в мицелиальной биомассе лекарственных базидиевых грибов *Hericium coralloides* и *Fomitopsis officinalis* на различных этапах культивирования *in vitro*. Установлен видоспецифический характер динамики отдельных форм цитокининов. Максимальное содержание этих гормонов у *H. coralloides* зафиксировано в фазу интенсивного роста, замедление ростовых процессов происходило на фоне постепенного снижения их уровня. У *F. officinalis* четкой зависимости между нарастанием мицелиальной биомассы и аккумуляцией цитокининов не обнаружено. Выявленные в процессе роста мицелиальной биомассы изменения в характере накопления эндогенных цитокининов рассматриваются в качестве косвенного свидетельства участия этих фитогормонов в регуляции роста и развития базидиевых грибов.*

**Ключевые слова:** цитокинины, рост, базидиевые грибы, мицелиальная биомасса.

Цитокинины представляют класс растительных гормонов широкого спектра действия. Они контролируют клеточное деление, донорно-акцепторные взаимоотношения и поглощение питательных веществ в тканях, стимулируют образование и активность верхушечных меристем стебля, ингибируют рост и разветвление корневой системы, задерживают старение листьев при экзогенном нанесении, участвуют в регуляции прорастания семян и формирования реакции на стрессы, а также других разнообразных проявлений жизнедеятельности растений. Подавляющее большинство исследований функционирования цитокининов как гормонов выполнено на растительных объектах. Применение молекулярно-генетических методов позволило достичь значительного прогресса в понимании путей их биосинтеза и метаболизма, механизмов рецепции и передачи цитокининовых сигналов, дальнего и ближнего транспорта. У высших сосудистых растений цитокинины, выполняя функции сигналь-

ных молекул, передают информацию об изменяющихся условиях внешней среды на геном, запуская формирование ответа в виде синтеза соответствующих белков [1]. Цитокинины в форме свободных оснований или их конъюгатов, а также в составе тРНК обнаружены практически у всех живых существ: бактерий, низших и высших растений, грибов, нематод, насекомых, животных и людей. Предполагают, что первоначальная функция этих молекул, зафиксированная эволюционно, состояла в улучшении трансляции белка в рибосомах, поскольку они модифицировали 3'-конец антикодона тРНК. Не исключено, что выполнять регуляторную роль цитокинины начали только у наземных растений, тогда как у менее эволюционно развитых организмов и особенно у представителей других царств они являются всего лишь продуктами метаболизма [2].

Грибы относят к отдельному царству живых существ, в клеточной структуре и метаболизме которых присутствуют черты как растений, так и животных. Цитокинины найдены у многих видов грибов [3]. Достаточно детально исследовано участие этих гормонов во взаимодействии между растением-хозяином и фитопатогенными организмами при грибных инфекциях. Тем не менее функциональная роль цитокининов в организме гриба до сих пор остается невыясненной. В отдельных работах сообщалось о влиянии экзогенных цитокининов на развитие микро- и макромицетов. В частности, кинетин усиливал рост мицелия микроскопических грибов *Rhizopus oryzae* [4] и *Mucor indicus* [5]. Кинетин также позитивно влиял на размеры шляпки и длину ножки *Pleurotus ostreatus* [6]. Внесение кинетина в среду культивирования увеличивало биомассу и содержание белка у *Pleurotus sajor-caju* [7] и *Agaricus campestris* [8]. Приведенные факты косвенно указывают на возможное участие цитокининов в регуляции ростовых процессов у грибов, хотя и не исключают другой способ их действия.

Значительно меньше известно об эндогенных цитокининах грибов, особенно макромицетов. Были описаны различия в содержании отдельных форм цитокининов у более чем 20 видов лесных грибов. Однако, так как стадии развития плодовых тел, на которых отбирали материал для анализов, не были четко установлены, сделать однозначные выводы о функциональной роли гормона не представлялось возможным [9, 10].

Поскольку грибы являются высококачественным белковым продуктом, обладающим кроме вкусовых и питательных ценными медицинскими свойствами, применение цитокининов как стимуляторов роста представляет значительный интерес с точки зрения повышения их продуктивности при выращивании в культуре. Вместе с тем остается невыясненным вопрос об участии цитокининов в регуляции роста и развития грибов, ответ на который позволил бы расширить представления об эволюции фитогормонов в целом. В связи с вышеизложенным наша цель состояла в изучении и сравнении показателей роста с качественным составом и характером аккумуляции эндогенных цитокининов в мицелиальной биомассе лекарственных базидиевых грибов: сапротрофного дереворазрушающего *Hericium coralloides* (штамм 2332) и фитопатогена лиственницы *Fomitopsis officinalis* (штамм 5004) на разных этапах культивирования *in vitro*.

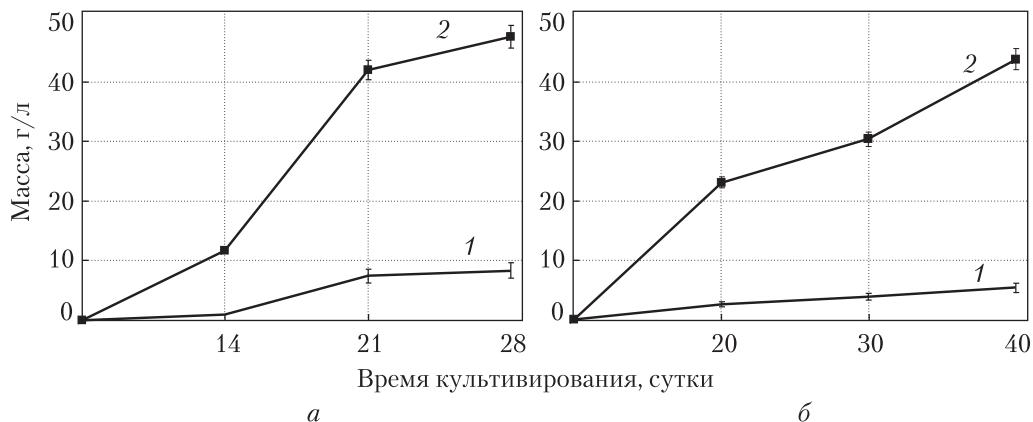
**Материалы и методы.** Мицелиальную биомассу базидиевых грибов *Hericium coralloides* (Scop.) Pers. (штамм 2332) и *Fomitopsis officinalis* (Vill.: Fr.) Kotl. et Pouzar (штамм 5004) выращивали в колбах Эрленмейера объемом 250 мл с добавлением 50 мл питательной среды в стационарных условиях ( $26 \pm 1^\circ\text{C}$ ) в темноте в течение 21 и 40 суток соответственно.

но. Инокуляцию физиологически активным мицелием в пропорции 10 % к общему объему производили по методике, разработанной для базидиомицетов [11], что составило для *H. coralloides* 0,1 г массы сырого вещества и для *F. officinalis* 0,6 г массы сырого вещества. Перед инокуляцией контролировали микробиологическую чистоту питательной среды и посевного материала. Состав жидкой питательной среды: глюкоза – 30,0 г/л;  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  – 3,5 г/л; KCl – 0,5 г/л;  $\text{K}_2\text{HPO}_4$  – 1,0 г/л;  $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  – 0,5 г/л; ячменный солод (15° по методу Балинга) – 115 мл;  $\text{H}_2\text{O}$  – 1 л, pH – 5,0. Этапы культивирования: мицелиальная культура штамма на агаризованной среде в пробирке → мицелиальная культура штамма на агариизированной среде в чашке Петри → мицелиальная культура штамма на агариизированной среде в колбе с отбойниками → встраивание → мицелиальная культура штамма на жидкой питательной среде в лабораторных флаконах.

Для анализа цитокининов мицелиальную биомассу отделяли от культуральной среды путем фильтрации под вакуумом и промывали дважды в 50 мл калий-фосфатного буфера, pH 6,5. Процедура выделения и очистки цитокининов из грибного материала детально описана ранее [12]. Качественный состав и количественное содержание гормонов анализировали методом ВЭЖХ-МС (Agilent 1200, США). Образцы пропускали через колонку хроматографа высокого разрешения Agilent Zorbax Eclipse XDB-C18 (4,6 × 250 мм, 5 мкм), используя в качестве элюента систему растворителей метанол : вода : уксусная кислота (37 : 62,9 : 0,1 по объему) в изократическом режиме со скоростью 0,5 мл/мин при 30 °C. После элюции фракции сразу же анализировали на масс-спектрометре Agilent 6120 Quadrupole LC/MS в комбинированном режиме “multi mode” позитивной ионизации (электроспрей и химическая ионизация при атмосферном давлении). Данные обрабатывали с помощью программного обеспечения Agilent ChemStation, версия B.03.01 on line. Для более точной идентификации пиков цитокининов использовали метод внутренних стандартов, а для количественного определения — калибровку с применением стандартов цитокининов производства фирмы “Sigma-Aldrich” (США).

Все эксперименты выполняли в трехкратной биологической повторности, анализы на ВЭЖХ-МС повторяли пятикратно. Данные обрабатывали с помощью приемов вариационной статистики с использованием программы Microsoft Excel 2007. На рисунках представлены средние величины значений, бары обозначают стандартные отклонения от среднего значения признака при 5 % уровне значимости.

**Результаты и их обсуждение.** Изучение накопления массы сухого и сырого вещества выявило различия между характером роста мицелиальной биомассы *H. coralloides* 2332 и *F. officinalis* 5004 (рис. 1). Так, у *H. coralloides* максимальная скорость роста мицелия зафиксирована между 14-ми и 21-ми сутками культивирования, затем она существенно снижалась. За этот период масса сухого вещества увеличивалась в семь раз, а масса сырого вещества — почти в четыре раза (см. рис. 1, а). У *F. officinalis* 5004 рост мицелиальной биомассы протекал медленнее, более равномерно и поступательно. Если масса сырого вещества *H. coralloides* 2332 составляла 47,5 г/л питательной среды на 28-е сутки культивирования, то у *F. officinalis* 5004 она достигала значения 45 г/л только на 40-е сутки (см. рис. 1, б). Кроме того, у *F. officinalis* 5004 масса сухого вещества изменялась очень незначительно между 20-ми и 40-ми сутками культивирования, тогда как у *H. coralloides* 2332 масса сухого вещества за аналогичный период увеличивалась более чем в семь раз. Следовательно, процессы роста и развития мицелия



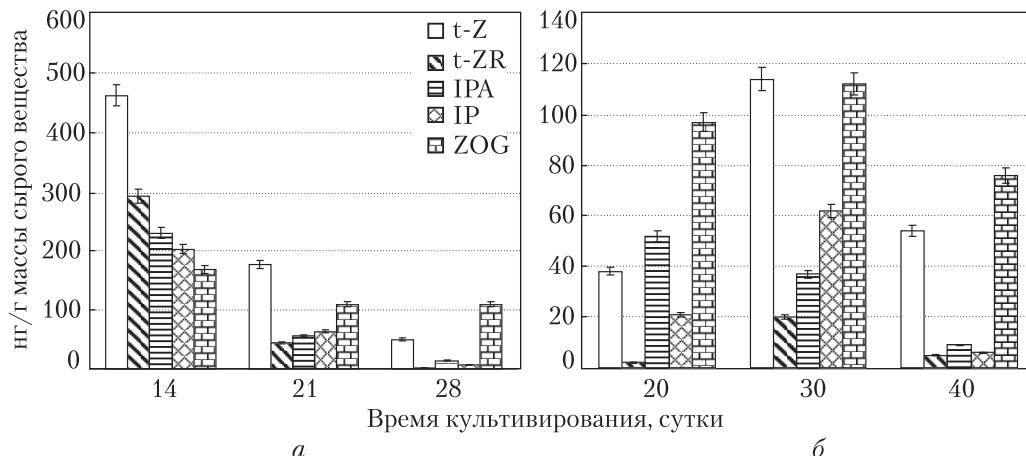
**Рис. 1.** Рост мицелиальной биомассы *Hericium coralloides* (а) и *Fomitopsis officinalis* (б):  
1 – масса сухого вещества; 2 – масса сырого вещества

лиальной биомассы *H. coralloides* 2332 и *F. officinalis* 5004 характеризуются определенной спецификой, зависящей от генетической природы каждого вида.

В мицелиальной биомассе двух исследованных видов базидиомицетов выявлен достаточно широкий спектр цитокининов (рис. 2). На всех изученных этапах роста присутствовали *транс*-зеатин, *транс*-зеатинрибозид, изопентениладенозин, изопентениладенин и зеатин-*O*-глюкозид с преобладанием первого из них. Следует отметить, что подобный качественный состав цитокининового пулла обычно встречается у большинства видов растений, при этом доминирующей формой также является *транс*-зеатин [13]. Как известно, *транс*-зеатин проявляет наибольшую активность в биотестах и имеет наибольшее средство как минимум к двум типам рецепторов цитокининов [1]. Именно благодаря этим особенностям его рассматривают как наиболее функционально значимый гормон цитокининового ряда, участвующий в регуляции развития растений. Несмотря на то, что *транс*-зеатин был обнаружен в плодовых телах целого ряда макромицетов [9, 10, 14], его роль в регуляции развития грибов остается невыясненной. В мицелиальной биомассе *H. coralloides* и *F. officinalis* *транс*-зеатин превалировал над другими формами цитокининов, что косвенно указывает на возможность участия гормона в регуляции роста мицелия грибов.

Количество изопентениладенина было в несколько раз меньше, чем *транс*-зеатина (см. рис. 2). Как известно, изопентениладенин является первичным продуктом прямого (мевалонатного) пути биосинтеза цитокининов, называемого изопентенилзависимым. В клетках грибов биосинтез изопентениладенина происходит в цитозоле и митохондриях. Изопентениладенин нестабилен и при участии цитохром-Р450-монооксидазы быстро гидроксилируется до *транс*-зеатина [2], чем можно объяснить низкую концентрацию гормона.

В мицелиальной биомассе *H. coralloides* 2332 и *F. officinalis* 5004 было обнаружено значительное количество зеатин-*O*-глюкозида (см. рис. 2). Этот коньюгат является неактивной формой цитокининов, которая легко превращается в свободный зеатин с помощью  $\beta$ -глюкозидазы. *O*-глюкозилирование предохраняет боковую  $N^6$ -цепь молекулы от расщепления цитокиниоксидазой [2]. В связи с этим зеатин-*O*-глюкозид обычно рассматривают как “депо” цитокининов. Полученные нами данные позволяют предположить, что в мицелиальной биомассе *H. coralloides* 2332 и *F. officinalis* 5004 супероптимальные количества зеатино-



**Рис. 2.** Динамика цитокининов в мицелиальной биомассе *Hericium coralloides* (а) и *Fomitopsis officinalis* (б)

вых цитокининов резервируются в виде зеатин-*O*-глюкозида. Таким образом, аккумуляция *O*-глюкозидов может быть одним из путей нейтрализации гиперсинтеза цитокининов у базидиомицетов.

На всех этапах роста мицелиальной биомассы были выявлены рибозилированные основания цитокининов (*транс*-зеатинрибозид и изопентениладенозин) (см. рис. 2). Предполагают, что у растений зеатинрибозид служит транспортной формой, перемещающейся по ксилеме стебля в акропetalном направлении и участвующей в дальнедистанционной коммуникации [1]. Подобные функции этого цитокинина в мицелиальной биомассе невозможны вследствие структурной специфики, тем не менее сходство его динамики и изменений содержания *транс*-зеатина указывает на тесную метаболическую, не исключено, что и функциональную, связь этих двух цитокининов. Роль изопентениладенозина у растений изучена слабо. Полагают, что его присутствие в молекуле тРНК самых различных живых организмов служит стабилизации распознавания кодона и улучшению качества трансляции [13].

В биомассе фитопатогенного гриба *F. officinalis* 5004 на всех этапах роста количество цитокининов было меньшим, чем в биомассе сапротрофного *H. coralloides* 2332. Для многих фитопатогенных грибов показана важная, если не определяющая, роль выделяемых грибом эндогенных цитокининов в патогенезе растений, сопровождающемся различными симптомами гормональной дисфункции, такими как образование галл или рака растений [15]. Однако патология лиственницы, вызванная *F. officinalis*, не сопровождается подобными новообразованиями у растения-хозяина или иными признаками нарушения гормонального фона, что, возможно, указывает на иную роль цитокининов в физиологии данного фитопатогенного гриба.

Мицелиальная биомасса *H. coralloides* 2332 и *F. officinalis* 5004 различалась и по динамике содержания цитокининов в процессе роста. У *H. coralloides* 2332 уровень изученных гормонов был наивысшим на начальной стадии развития (см. рис. 2, а). Особенно значительной была концентрация активных форм цитокининов — *транс*-зеатина и *транс*-зеатинрибозида — на 14-е сутки культивирования, что совпадает с наибольшими значениями ростовых показателей — накоплением массы сырого и сухого вещества. По мере за-

медления роста мицелиальной биомассы *H. coralloides* 2332 содержание свободных форм цитокининов многократно уменьшалось. Уровень зеатин-*O*-глюкозида также несколько снижался, однако оставался довольно высоким даже на 28-е сутки культивирования. Необходимо подчеркнуть, что подобный характер динамики цитокининов присущ растениям: гипероптимальные концентрации свободных гормонов наблюдаются в тканях с высоким митотическим индексом, интенсивный рост которых происходит за счет клеточного деления, а торможение роста сопровождается снижением содержания активных цитокининов и аккумуляцией коньюгатов [13].

Несколько иной характер распределения цитокининов выявлен в растущей мицелиальной биомассе *F. officinalis* 5004. В начале культивирования уровень активных форм цитокининов был относительно невысоким (см. рис. 2, б). На 30-е сутки содержание всех цитокининов, за исключением изопентенилденозина, дифференциально возрастало. Затем вновь снижалось, однако на 40-е сутки концентрации *транс*-зеатина и *транс*-зеатинрибозида оставались выше, чем на 20-е сутки культивирования. Следует отметить, что в период, когда уровни свободных цитокининов возрастили (30-е сутки), существенных флуктуаций в динамике роста не наблюдалось. В течение развития мицелиальной биомассы *F. officinalis* 5004 содержание зеатин-*O*-глюкозида оставалось довольно высоким и мало изменялось. Таким образом, в отличие от *H. coralloides* 2332, у *F. officinalis* 5004 не удалось установить коррелятивных взаимоотношений между динамикой роста мицелиальной биомассы и уровнем цитокининов. Возможно, это связано с фитопатогенной природой данного гриба, который синтезирует гормоны не только для регуляции собственного роста, но и для манипуляции метаболизмом растения-хозяина, например, для аттрагирования питательных веществ.

В целом, полученные результаты не позволяют сделать однозначное заключение о регуляторной роли цитокининов в развитии мицелия базидиевых грибов. Зафиксированные в наших исследованиях качественные и количественные изменения эндогенных цитокининов в процессе роста мицелиальной биомассы грибов косвенно указывают на возможное участие гормонов в регуляции роста грибных организмов. Для того чтобы получить ответ на вопрос, выполняют ли цитокинины регуляторные функции и какие именно, необходимы дальнейшие эксперименты с приобщением значительного количества видов грибов различной таксономической принадлежности. Информация такого рода была бы полезна как для понимания механизма действия гормонов у грибов, так и для фитогормональной стимуляции продуктивности грибов в культуре и разработки биотехнологий получения биологически активных продуктов грибного происхождения для агробиологии и фармацевтики.

*Работа выполнена в рамках проекта “Скрининг лекарственных грибов – производителей цитокининов для создания новейших биологически активных препаратов и лекарственных средств” при поддержке НАН Украины.*

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Zürcher E., Müller B. Cytokinin synthesis, signaling and function – advances and new insights. *Int. Rev. Cell Mol. Biol.* 2016. **324**. P. 1–38. doi: <https://doi.org/10.1016/bs.ircmb.2016.01.001>
2. Frébort I., Kowalska M., Hluska T., Frébortová J., Galuszka P. Evolution of cytokinin biosynthesis and degradation. *J. Exp. Bot.* 2011. **62**, № 8. P. 2431–2452. doi: <https://doi.org/10.1093/jxb/err004>
3. Chanclud E., Morel J.-B. Plant hormones: a fungal point of view. *Mol. Plant Pathol.* 2016. **17**, № 8. P. 1289–1297. doi: <https://doi.org/10.1111/mpp.12393>

4. Chatterjee S., Chatterjee B.P., Guha A.K. Enhancement of growth and chitosan production by *Rhizopus oryzae* in whey medium by plant growth hormones. *Int. J. Biol. Macromol.* 2008. **42**, № 2. P. 120–126. doi: <https://doi.org/10.106/j.ijbiomac.2007.10.006>
5. Safaei Z., Karimi K., Golkar P., Zamani A. Effects of plant hormones on *Mucor indicus* growth and chitosan and ethanol production. *Int. J. Mol. Sci.* 2015. **16**, № 7. P. 16683–16694. doi: <https://doi.org/10.3390/ijms160716683>
6. Ramachela K., Sihlangu S.M., Moral M.T. Effect of various hormonal treated plant substrates on development and yield of *Pleurotus ostreatus*. *Cogent Food Agricult.* 2016. **2**, № 1. 1276510.
7. Mukhopadhyay R., Chatterjee S., Chatterjee B.P., Guha A.K. Enhancement of biomass production of edible mushroom *Pleurotus sajor-caju* grown in whey by plant growth hormones. *Proc. Biochem.* 2005. **40**, № 3–4. P. 1241–1244. doi: <https://doi.org/10.1016/j.procbio.2004.05.006>
8. Guha A.K., Banerjee A.B. Effect of indole-3-acetic acid and kinetin on submerged growth of *Agaricus campestris*. *Acta Microbiol. Pol.* 1974. **6**, № 3. P. 133–134.
9. Türker M., Demirel K., Uzun Y., Battal P., Tileklioğlu B. Determination of phytohormones level in some dried and fresh macrofungi taxa. *Phyton-Ann. Rei Bot.* 2005. **45**. P. 145–157.
10. Morrison E.N., Knowles S., Hayward A., Thorn R.G., Saville B.J., Emery R.J. Detection of phytohormones in temperate forest fungi predicts consistent abscisic acid production and a common pathway for cytokinin biosynthesis. *Mycologia*. 2015. **107**, № 2. P. 245–257. doi: <https://doi.org/10.3852/14-157>
11. Bisko N.A., Lomberg M.L., Mytropolska N.Yu., Mykchaylova O.B. The IBK Mushroom Culture Collection. Kiev: Alterpres, 2016. 215 p.
12. Vedenicheva N.P., Al-Maali G.A., Mytropolska N.Yu., Mykhaylova O.B., Bisko N.A., Kosakivska I.V. Endogenous cytokinins in medicinal basidiomycetes mycelial biomass. *Biotechnol. Acta*. 2016. **9**, № 1. P. 55–63. doi: <https://doi.org/10.15407/biotech9.01.055>
13. Веденичева Н.П., Косаківська І.В. Цитокініни як регулятори онтогенезу рослин за різних умов зростання. Київ: Наш формат, 2017. 200 с.
14. Özcan B. GA3, ABA and cytokinin production by *Lentinus tigrinus* and *Laetiporus sulphureus* fungi cultured in the medium of olive oil mill waste. *Turk. J. Biol.* 2001. **25**, № 4. P. 453–462.
15. Grant M.R., Jones J.D. Hormone (dis)harmony moulds plant health and disease. *Science*. 2009. **324**(5928). P. 750–752. doi: <https://doi.org/10.1126/science>

Поступило в редакцию 29.05.2018

## REFERENCES

1. Zürcher, E. & Müller, B. (2016). Cytokinin synthesis, signaling and function – advances and new insights. *Int. Rev. Cell Mol. Biol.*, 324, pp. 1-38. doi: <https://doi.org/10.1016/bs.ircmb.2016.01.001>
2. Frébort, I., Kowalska, M., Hluska, T., Frébortová, J. & Galuszka, P. (2011). Evolution of cytokinin biosynthesis and degradation. *J. Exp. Bot.*, 62, No 8, pp. 2431-2452. doi: <https://doi.org/10.1093/jxb/err004>
3. Chanclud, E. & Morel, J.-B. (2016). Plant hormones: a fungal point of view. *Mol. Plant Pathol.*, 17, No 8, pp. 1289-1297. doi: <https://doi.org/10.1111/mpp.12393>
4. Chatterjee, S., Chatterjee, B. P. & Guha, A. K. (2008). Enhancement of growth and chitosan production by *Rhizopus oryzae* in whey medium by plant growth hormones. *Int. J. Biol. Macromol.*, 42, No. 2, pp. 120-126. doi: <https://doi.org/10.106/j.ijbiomac.2007.10.006>
5. Safaei, Z., Karimi, K., Golkar, P. & Zamani, A. (2015). Effects of plant hormones on *Mucor indicus* growth and chitosan and ethanol production. *Int. J. Mol. Sci.*, 16, No. 7, pp. 16683-16694. doi: <https://doi.org/10.3390/ijms160716683>
6. Ramachela, K., Sihlangu, S. M. & Moral, M. T. (2016). Effect of various hormonal treated plant substrates on development and yield of *Pleurotus ostreatus*. *Cogent Food Agricult.*, 2, No. 1, 1276510.
7. Mukhopadhyay, R., Chatterjee, S., Chatterjee, B. P. & Guha, A. K. (2005). Enhancement of biomass production of edible mushroom *Pleurotus sajor-caju* grown in whey by plant growth hormones. *Proc. Biochem.*, 40, No. 3-4, pp. 1241-1244. doi: <https://doi.org/10.1016/j.procbio.2004.05.006>
8. Guha, A. K. & Banerjee, A. B. (1974). Effect of indole-3-acetic acid and kinetin on submerged growth of *Agaricus campestris*. *Acta Microbiol. Pol.*, 6, No. 3, pp. 133-134.
9. Türker, M., Demirel, K., Uzun, Y., Battal, P. & Tileklioğlu, B. (2005). Determination of phytohormones level in some dried and fresh macrofungi taxa. *Phyton-Ann. Rei Bot.*, 45, pp. 145-157.

10. Morrison, E. N., Knowles, S., Hayward, A., Thorn, R. G., Saville, B. J. & Emery, R. J. (2015). Detection of phytohormones in temperate forest fungi predicts consistent abscisic acid production and a common pathway for cytokinin biosynthesis. *Mycologia*, 107, No. 2, pp. 245-257. doi: <https://doi.org/10.3852/14-157>
11. Bisko, N. A., Lomberg, M. L., Mytropolska, N. Yu. & Mykchaylova, O. B. (2016). The IBK Mushroom Culture Collection. Kiev: Alterpres.
12. Vedenicheva, N. P., Al-Maali, G. A., Mytropolska, N. Yu., Mykhaylova, O. B., Bisko, N. A. & Kosakivska, I. V. (2016). Endogenous cytokinins in medicinal basidiomycetes mycelial biomass. *Biotechnol. Acta*, 9, No. 1, pp. 55-63. doi: <https://doi.org/10.15407/biotech9.01.055>
13. Vedenicheva, N. P. & Kosakivska, I. V. (2017). Cytokinins as regulators of plant ontogenesis under different growth conditions. Kiev: Nash Format (in Ukrainian).
14. Özcan, B. (2001). GA3, ABA and cytokinin production by *Lentinus tigrinus* and *Laetiporus sulphureus* fungi cultured in the medium of olive oil mill waste. *Turk. J. Biol.*, 25, No. 4, pp. 453-462.
15. Grant, M. R. & Jones, J. D. (2009). Hormone (dis)harmony moulds plant health and disease. *Science*, 324(5928), pp. 750-752. doi: <https://doi.org/10.1126/science>

Received 29.05.2018

Н.П. Веденичева, Г.А. Аль-Маали,

Н.А. Бісько, М.М. Щербатюк, І.В. Косаківська

Інститут ботаніки ім. М.Г. Холодного НАН України, Київ

E-mail: vedenicheva@ukr.net

**ОСОБЛИВОСТІ РОСТУ І ВМІСТ ЕНДОГЕННИХ ЦИТОКІНІНІВ  
У МІЦЕЛІАЛЬНІЙ БІОМАСІ БАЗИДІЄВИХ ГРИБІВ *HERICIUM CORALLOIDES*  
І *FOMITOPSIS OFFICINALIS* В КУЛЬГУРІ *IN VITRO***

Проаналізовано динаміку росту і особливості акумуляції ендогенних цитокінінів у міцеліальній біомасі лікарських базидієвих грибів *Hericium coralloides* і *Fomitopsis officinalis* на різних етапах культивування *in vitro*. Встановлено видоспецифічний характер динаміки окремих форм цитокінінів. Максимальний вміст цих гормонів у *H. coralloides* зафіксовано у фазу інтенсивного росту, гальмування ростових процесів відбувалося на фоні поступового зниження їхнього рівня. У *F. officinalis* чіткої залежності між наростианням міцеліальної біомаси і акумуляцією цитокінінів не зафіксовано. Виявлені в процесі росту міцеліальної біомаси зміни в характері накопичення ендогенних цитокінінів розглядаються як опосередковані свідчення участі цих фітогормонів у регуляції росту і розвитку базидієвих грибів.

**Ключові слова:** цитокінини, ріст, базидієві гриби, міцеліальна біомаса.

N.P. Vedenicheva, G.A. Al-Maali,

N.A. Bisko, M.M. Shcherbatiuk, I.V. Kosakivska

M.G. Kholodny Institute of Botany of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: vedenicheva@ukr.net

**PECULIARITIES OF THE GROWTH AND THE CONTENT  
OF ENDOGENOUS CYTOKININS IN THE MYCELIAL BIOMASS OF BASIDIAL MUSHROOMS  
*HERICIUM CORALLOIDES* AND *FOMITOPSIS OFFICINALIS* GROWING *IN VITRO***

Growth dynamics and features of the accumulation of endogenous cytokinins in the mycelial biomass of medicinal basidial mushrooms *Hericium coralloides* and *Fomitopsis officinalis* at the various stages of cultivation *in vitro* have been analyzed. Accumulation dynamics of individual cytokinin forms is found to be species-specific. The maximum cytokinin content in *H. coralloides* occurred in the phase of an intensive growth, and the growth slowed down along with a gradual decrease in their levels. In *F. officinalis*, no clear correlation between the mycelial biomass growth and the accumulation of cytokinins was observed. Changes in the endogenous cytokinins accumulation pattern detected during the mycelial biomass growth are considered as an indirect evidence of the involvement of these phytohormones in the regulation of the growth and development of basidial mushrooms.

**Keywords:** cytokinins, growth, mycelial biomass, Basidiomycetes.

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.105>

УДК 582.287.539.16 : 546.36

**Н.Е. Зарубіна**

Інститут ядерних ісследований НАН України, Київ  
E-mail: nataliia.zarubina@gmail.com, zarubina@kinr.kiev.ua

## **Ізменение содержания $^{137}\text{Cs}$ в различных объектах лесных экосистем зоны отчуждения Чернобыльской АЭС в течение календарного года**

*Представлено членом-корреспондентом НАН України В.І. Слісенко*

*Исследованы сезонные изменения содержания  $^{137}\text{Cs}$  в почве и растительности лесных экосистем на территории зоны отчуждения Чернобыльской АЭС. Зависимости изменения концентраций  $^{137}\text{Cs}$  от сезона года в почвах не выявлено. В хвое и побегах *Pinus sylvestris* максимальные значения концентрации радионуклида отмечаются в весенне-летний период. Установлено наличие линейной зависимости между сезонными изменениями содержания  $^{137}\text{Cs}$  в хвое и побегах *P. sylvestris* на полигонах с разным уровнем загрязнения. Совпадающие по времени изменения содержания  $^{137}\text{Cs}$  в исследованных органах *P. sylvestris* на разных полигонах свидетельствуют об общих для лесных экосистем закономерностях перераспределения  $^{137}\text{Cs}$  по цепи почва – растительность в течение года.*

**Ключевые слова:** зона отчуждения Чернобыльской АЭС, лесные экосистемы, сезонные изменения, содержание  $^{137}\text{Cs}$ .

В многочисленных исследованиях, проводимых после аварии на Чернобыльской АЭС, отмечено постепенное снижение содержания  $^{137}\text{Cs}$  во всех объектах природных и полуприродных экосистем с течением времени. Но на фоне этого снижения концентраций отмечаются колебания значений удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в течение календарного года. Для дикорастущих растений и лесных экосистем таких работ немного и результаты исследований часто противоречивы.

Показано [1], что в древесине сосны, березы и осины регистрируется незначительное повышение удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  к осени, у если таких изменений не отмечено. С сентября–октября содержание этого радионуклида в древесине повышается. В коре исследованных видов деревьев (кроме березы) зафиксированы такие же колебания концентрации  $^{137}\text{Cs}$ .

В работе [2] отмечено, что у дуба наблюдается возрастание удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в 1,5 раза от весны к лету, в то время как для ольхи характерен противоположный процесс. Для сосны сезонные колебания не прослеживались. Исследования древесины [3] показали незначительные изменения содержания  $^{137}\text{Cs}$  в ней в зимний период.

Согласно данным [4], уровень удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в надземной фитомассе лесных экосистем зимой повышается в 10 раз по сравнению с маев. Сезонная динамика накопления  $^{137}\text{Cs}$  в хвое текущего года *Pinus sylvestris* L. характеризуется практически однократным изменением концентрации  $^{137}\text{Cs}$  в сторону понижения от весны до осени [5]. Стабилизация наступает с сентября. Такие же закономерности отмечены для двухлетней хвои. Но в то же время четко выраженных изменений в содержании этого радионуклида в двух- и трехлетней хвое в течение вегетационного сезона не наблюдается.

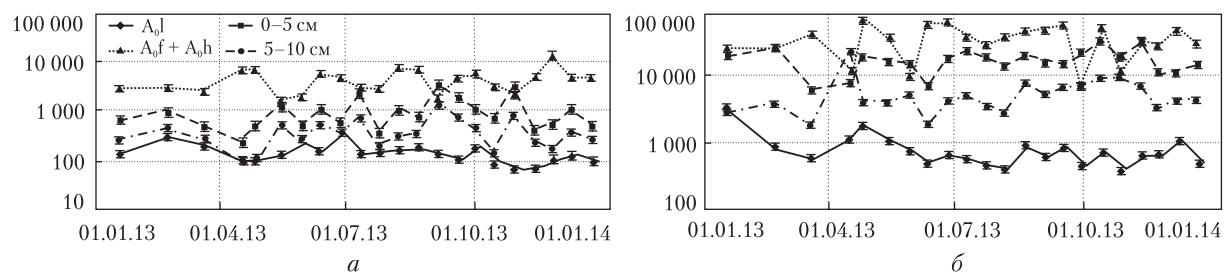
Исследования удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в различных объектах лесных экосистем зоны отчуждения ЧАЭС проводились на двух полигонах — Лелев ( $30^{\circ}09'36,63''\text{E}$ ,  $51^{\circ}19'19,74''\text{N}$ ) и Парышев ( $51^{\circ}17'57,54''\text{E}$ ,  $30^{\circ}18'17,43''\text{N}$ ) на протяжении 2013 г. На обоих полигонах тип лесорастительных условий А<sub>1</sub> — бор сухой.

В качестве объектов исследования использованы: A<sub>0</sub>l и A<sub>0</sub>f+A<sub>0</sub>h (лесная подстилка), слои 0—5 см и 5—10 см гумусово-элювиального горизонта НЕ почвы; однолетние и двухлетние хвоя и побеги *P. sylvestris* — одни из наиболее загрязненных  $^{137}\text{Cs}$  частей этого растения.

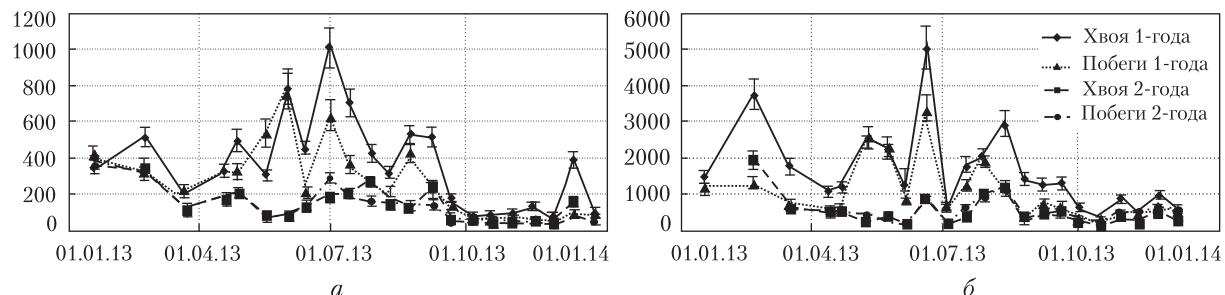
Отбор проб осуществлялся один раз в месяц в январе, феврале и марте. Начиная с апреля пробоотбор проводился один раз в две недели.

Тип почвы полигонов: дерново-скрытоподзолистая песчаная на древнеаллювиальных отложениях — Лелев; дерново-слабоподзолистая глинисто-песчаная глееватая почва на древнеаллювиальных отложениях — Парышев.

Для исключения влияния на расчеты периода полураспада  $^{137}\text{Cs}$  данные измерений удельной активности этого радионуклида в пробах пересчитывались на дату аварии — 26 апреля 1986 г.



**Рис. 1.** Содержание  $^{137}\text{Cs}$  в почве послойно на территории полигонов Парышев (а) и Лелев (б), Бк/кг воздушно-сухой массы, логарифмическая шкала



**Рис. 2.** Содержание  $^{137}\text{Cs}$  в хвое и побегах *P. sylvestris* на территории полигонов Парышев (а) и Лелев (б), Бк/кг сухой массы

Содержание  $^{137}\text{Cs}$  во всех исследованных объектах изменяется на протяжении календарного года. В разных почвенных слоях (рис. 1) максимумы удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  отмечаются на протяжении всего года и не совпадают по времени друг с другом. В хвое и побегах *P. sylvestris* максимальный уровень содержания  $^{137}\text{Cs}$  отмечен в весенне-летний период (рис. 2).

На основе полученных данных рассчитаны коэффициенты корреляции ( $r$ ) между содержанием  $^{137}\text{Cs}$  в почве (послойно), одно- и двулетних побегах и хвое на каждом полигоне. Согласно результатам расчетов ( $r < |0,3|$ ), изменения содержания  $^{137}\text{Cs}$  в разных почвенных слоях происходят независимо друг от друга, что указывает на различие процессов накопления и перераспределения  $^{137}\text{Cs}$  в них. Не было установлено линейной зависимости между наблюдаемыми колебаниями содержания  $^{137}\text{Cs}$  в почве (послойно) и изменением уровня удельной активности этого радионуклида в одно- и двулетних хвое и побегах *P. sylvestris* ( $r < |0,3|$ ).

Наличие корреляции между сезонными колебаниями значений удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в хвое и побегах на каждом полигоне (табл. 1) указывает на сходство процессов накопления этого радионуклида как быстрорастущими однолетними хвоей и побегами, так и двулетними.

С использованием метода корреляционного анализа проведено сравнение сезонных колебаний содержания  $^{137}\text{Cs}$  в хвое и побегах *P. sylvestris* на полигонах Лелев и Парышев (табл. 2). Установлено, что изменение уровня удельной активности этого радионуклида как в сторону увеличения, так и уменьшения в хвое и побегах *P. sylvestris* на обоих полигонах происходит практически одновременно. Это указывает на то, что независимо от различий в уровне загрязнения, типе почв, расстоянии и направлении от ЧАЭС процессы аккумуляции  $^{137}\text{Cs}$  в растениях имеют свои временные закономерности, т. е. основным фактором, влияющим на перераспределение этого радионуклида между почвой и *P. sylvestris*, являются именно процессы жизнедеятельности растений.

На основании результатов исследования, можно утверждать, что использовать лесную подстилку и верхние генетические горизонты лесных почв в качестве объектов мониторинга сезонной динамики содержания  $^{137}\text{Cs}$  нецелесообразно. Уровень удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в хвое и побегах *P. sylvestris* изменяется в зависимости от сезона. Периодические изменения содержания этого радионуклида в *P. sylvestris* свидетельствуют о том, что в лес-

Таблица 1. Коэффициенты корреляции между удельной активностью  $^{137}\text{Cs}$  в одно- и двулетних побегах и хвое *P. sylvestris*

Исследуемые органы <i>P. sylvestris</i>	Парышев	Лелев
Однолетняя хвоя — однолетние побеги	+ 0,84	+ 0,88
Однолетняя хвоя — двухлетняя хвоя	+ 0,75	+ 0,81
Однолетняя хвоя — двухлетние побеги	+ 0,76	+ 0,82
Однолетние побеги — двухлетняя хвоя	+ 0,54	+ 0,56
Однолетние побеги — двухлетние побеги	+ 0,66	+ 0,67
Двухлетняя хвоя — двухлетние побеги	+ 0,76	+ 0,93

Таблица 2. Коэффициенты корреляции ( $r$ ) между удельной активностью  $^{137}\text{Cs}$  в хвое и побегах *P. sylvestris* на территории полигонов Лелев и Парышев

Содержание $^{137}\text{Cs}$ в однолетней хвое	+ 0,60
Содержание $^{137}\text{Cs}$ в однолетних побегах	+ 0,84
Содержание $^{137}\text{Cs}$ в двухлетней хвое	+ 0,69
Содержание $^{137}\text{Cs}$ в двухлетних побегах	+ 0,62

ных экосистемах выпавший после аварии радионуклид находится в постоянном круговороте:  $^{137}\text{Cs}$  может как поступать в растение, так и выводиться из него. В почву  $^{137}\text{Cs}$  поступает не только с опадом, но также происходит его отток из живых тканей *P. sylvestris*. Изменения содержания  $^{137}\text{Cs}$  в хвое и побегах *P. sylvestris*, практически совпадающие по времени на полигонах с разным типом и уровнем первичного загрязнения, свидетельствуют о существовании общих для этого вида растительности сезонных закономерностей накопления и перераспределения  $^{137}\text{Cs}$  в процессе жизнедеятельности растения вне зависимости от различий в уровне загрязнения  $^{137}\text{Cs}$  почв.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Переволоцкий А.Н. Распределение  $^{137}\text{Cs}$  и  $^{90}\text{Sr}$  в лесных биогеоценозах. Минск: РНИУП «Институт радиологии», 2006. 256 с.
2. Пономарев А.В., Пономарева Е.Н., Барковский А.Н. и др. Динамика содержания  $^{137}\text{Cs}$  в органах древесных растений лесов Брянской области. *Вопросы лесной радиоэкологии*. Москва: МГУЛ, 2000. С. 80–88.
3. Чилимов А.И., Богачев А.В. Результаты наблюдений за динамикой удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в древесных растениях по данным минипроб. *Вопросы лесной радиоэкологии*. Москва: МГУЛ, 2000. С. 52–63.
4. Мухамедшин К.Д., Чилимов А.И., Безуглов В.К., Сныткин Г.В. Сертификация лесных ресурсов по радиационному признаку, как основа получения нормативно-чистой продукции лесного хозяйства на загрязненной радионуклидами территории. *Вопросы лесной радиоэкологии*. Москва: МГУЛ, 2000. С. 7–46.
5. Орлов О.О., Ірклієнко С.П., Турко В.М. Вміст  $^{137}\text{Cs}$  в компонентах біогеоценозів мезооліготрофних боліт Українського Полісся та роль сфагнового покриву у перерозподілі потоків калію та  $^{137}\text{Cs}$  в їх екосистемах. *Проблеми екології лісів і лісокористування на Поліссі України*. 1999. Вип. 6. С. 26–33.

Поступило в редакцию 26.02.2018

#### REFERENCES

1. Perekolotsky, A.N. (2006). Distribution of  $^{137}\text{Cs}$  and  $^{90}\text{Sr}$  in forest biogeocenoses. Minsk: RIIPE “Institute of Radiology” (in Russian).
2. Ponomarev, A.V., Ponomareva, E.N., Barkovsky, A.N. et al. (2000). The dynamics of  $^{137}\text{Cs}$  content in the organs of woody plants in the forests of the Bryansk region. In Questions of forest radioecology (pp. 80-88). Moscow: MGUL (in Russian).
3. Chilimov, A.I. & Bogachev, A.V. (2000). The results of observations of the dynamics of the specific activity of  $^{137}\text{Cs}$  in woody plants according to the data of mini-tests. Questions of forest radioecology. Moscow: MGUL. pp. 52-63 (in Russian).
4. Mukhamedshin, K.D., Chilimov, A.I., Bezuglov, V.K. & Snytkin, G.V. (2000). Certification of forest resources on the basis of radiation, as a basis for obtaining normative-clean forestry products on the territory contaminated with radionuclides. In Questions of forest radioecology (pp. 7-46). Moscow: MGUL (in Russian).
5. Orlov, O.O., Irklienko, S.P. & Turko, V.M. (1999). The content of  $^{137}\text{Cs}$  in the components of biogeocoenoses of meso-oligotrophic marshes of Ukrainian Polissya and the role of the sphagnum cover in the redistribution of potassium and  $^{137}\text{Cs}$  in their ecosystems. Problems of forest ecology and forest use in the Polissya of Ukraine, Iss. 6, pp. 26-33 (in Ukrainian).

Received 26.02.2018

*Н.Є. Зарубіна*

Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ

E-mail: nataliia.zarubina@gmail.com, zarubina@kinr.kiev.ua

**ЗМІНИ ВМІСТУ  $^{137}\text{Cs}$  У РІЗНИХ ОБ'ЄКТАХ ЛІСОВИХ ЕКОСИСТЕМ**

**ЗОНИ ВІДЧУЖЕННЯ ЧОРНОБИЛЬСЬКОЇ АЕС ПРОТЯГОМ КАЛЕНДАРНОГО РОКУ**

Проведено дослідження сезонних змін вмісту  $^{137}\text{Cs}$  у ґрунті і рослинності лісових екосистем на території зони відчуження Чорнобильської АЕС. Залежності змін концентрацій  $^{137}\text{Cs}$  від сезону року в ґрунтах не виявлено. У хвої і пагонах *P. sylvestris* максимальні значення концентрації радіонукліда відзначаються у весняно-літній період. Встановлено наявність лінійної залежності між сезонними змінами вмісту  $^{137}\text{Cs}$  у хвої і пагонах *P. sylvestris* на полігонах з різним рівнем забруднення. Зміни вмісту  $^{137}\text{Cs}$  в дослідженіх органах *P. sylvestris*, які збігаються за часом на різних полігонах, свідчать про загальні для лісових екосистем закономірності перерозподілу  $^{137}\text{Cs}$  по ланцюгу ґрунт – рослинність протягом року.

**Ключові слова:** зона відчуження Чорнобильської АЕС, лісові екосистеми, сезонні зміни, вміст  $^{137}\text{Cs}$ .

*N.Ye. Zarubina*

Institute for Nuclear Research of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: nataliia.zarubina@gmail.com, zarubina@kinr.kiev.ua

**CHANGING THE CONTENTS OF  $^{137}\text{Cs}$  IN VARIOUS OBJECTS**

**OF THE FOREST ECOSYSTEMS OF THE ChNPP**

**EXCLUSION ZONE DURING THE CALENDAR YEAR**

Seasonal changes in the content of  $^{137}\text{Cs}$  in the soil and vegetation of forest ecosystems on the territory of the Chernobyl exclusion zone have been studied. Dependences of changes in  $^{137}\text{Cs}$  concentrations on the season of the year in the soils were not revealed. In the needles and branches of *P. sylvestris*, the maximum values of the  $^{137}\text{Cs}$  concentration are noted in spring and summer. As a result of the studies, a linear relation was found between seasonal changes in the  $^{137}\text{Cs}$  concentration in needles and branches of *P. sylvestris* in testing areas with different levels of contamination. Changes of the  $^{137}\text{Cs}$  content in the studied organs of *P. sylvestris*, which coincide in time on different testing areas, indicate common regularities of the  $^{137}\text{Cs}$  redistribution at the soil-vegetation chain in forest ecosystems throughout the year.

**Keywords:** ChNPP, exclusion zone, forest ecosystems, seasonal changes, content of  $^{137}\text{Cs}$ .

## **Інформація для авторів журналу “Доповіді Національної академії наук України”**

Редакція журналу приймає для публікації повідомлення, що мають *мотивоване представлення* дійсного члена або члена-кореспондента НАН України з відповідної спеціальності. До статті додається *супровідний лист* організації, в якій виконано дослідження.

Журнал друкує не більше *трьох повідомлень одного автора* на рік. Повідомлення дійсних членів та членів-кореспондентів НАН України друкуються без обмежень.

У разі додаткового рецензування та переробки статті датою надходження вважається дата одержання редакцією її остаточного тексту. Прохання редакції про переробку не означає, що стаття прийнята до друку; після переробки вона знову розглядається редколегією. При відмові в публікації роботи редколегія залишає за собою право не повернати автору один екземпляр статті.

Повідомлення публікуються українською, російською або англійською мовою. Автор зазначає рубрику, в якій має публікуватися повідомлення, індекс за Універсальною десятковою класифікацією; свою поштову і електронну адресу, номер телефону.

*Обсяг* повідомлення не повинен перевищувати *восьми сторінок журналу* (включаючи список літератури – до 15 поз., таблиці, рисунки – до 4). Текст має бути набраний через 1,5 інтерvals, розмір шрифту 14 пт.

Фізичні величини наводяться в одиницях СІ. Наукова термінологія повинна відповідати “Російсько-українському словнику наукової термінології” (Київ: Наук. думка. – Т. 1–3. – 1994, 1996, 1998).

*Резюме* (обсягом не більше 1/3 сторінки) подається українською, російською та англійською мовами з ключовими словами (обов’язково вказати написання прізвищ та ініціалів, назву статті та організації (організацій) трьома мовами, e-mail).

*Списки літератури* (мовою оригіналу та в перекладі на англійську мову) складаються в порядку посилання в тексті (оформлення літературних джерел див. в останніх номерах журналу). При цитуванні опублікованої в журналі статті необхідно вказувати присвоєний цифровий ідентифікатор об’єкта (doi).

Файл статті подається у форматі .doc. Рисунки потрібно подавати окремими файлами: фото і складні графіки зберігати у форматі .eps, .tif, .jpg, .bmp, .png, прості графіки можна подавати у .doc або .xls, .xlsx. Для імен файлів використовувати зрозумілі короткі назви, набрані *латинськими літерами*.

*Статті* подаються безпосередньо до редакції або надсилаються на електронну пошту dopovidinanu@gmail.com

Номери журналу викладаються у відкритому доступі щомісяця на сайті <http://dopovidi-nanu.org.ua>

Адреса редакції: Київ, вул. Терещенківська, 3, тел. (044) 235-12-16.

*Автор може передплатити номер журналу, в якому надруковано його статтю, у відділенні зв’язку “Укрпошти” (індекс 74137), а також у агенції “Укрінформнаука” (e-mail: innovation@nas.gov.ua; тел./факс: +38(044)288-03-46).*