

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.10.003>

УДК 517.5

Е.С. Афанасьєва¹, В.И. Рязанов¹, Р.Р. Салимов²

¹ Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Славянськ

² Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

О граничном поведении классов Соболева с критическим показателем

Представлено членом-корреспондентом НАН України В.Я. Гутлянським

Найдены условия на внешнюю дилатацию $K_O(x, f)$ и границы областей в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, при которых гомеоморфизмы f классов Соболева $W_{loc}^{1,1}$ допускают непрерывное или гомеоморфное продолжение в замыкание областей.

Ключевые слова: *классы Соболева, критический показатель, внешняя дилатация, граничное поведение, непрерывное и гомеоморфное продолжение.*

Предварительные замечания. В работе получены приложения теории так называемых кольцевых и нижних Q -гомеоморфизмов к исследованию граничного поведения гомеоморфизмов с обобщенными производными по Соболеву (см., например, [1]).

Как известно, любой гомеоморфизм f класса $W_{loc}^{1,1}$ с локально интегрируемой дилатацией $K_O(x, f)$ на плоскости является как кольцевым, так и нижним Q -гомеоморфизмом с $Q = K_O(x, f)$ (см. [2, 3]). Кроме того, в работе [4], в частности, было показано, что гомеоморфизмы f класса $W_{loc}^{1,p}$ при $p > n - 1$ в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, являются так называемыми нижними Q -гомеоморфизмами с функцией $Q(x)$, равной внешней дилатации $K_O(x, f)$ отображения f , и кольцевыми Q_* -гомеоморфизмами с $Q_*(x) = K_O^{n-1}(x, f)$.

Случай с критическим показателем $p = n - 1$, который оставался неизученным, рассматривается в данной работе. Это продвижение оказалось возможным, прежде всего, благодаря статье [5].

Соответствующие определения и историю вопроса можно найти в [6].

2. Непрерывное продолжение на границу. Здесь и в дальнейшем мы используем обозначение предельных множеств отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ для множеств $X \subset \bar{D}$,

$$C(X, f) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k), x_k \rightarrow x_0 \in X, x_k \in D \right\}.$$

© Е.С. Афанасьєва, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов, 2019

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 10: 3–10

Заметим, что для произвольного гомеоморфизма $f : D \rightarrow D'$ имеет место включение $C(\partial D, f) \subset \partial D'$ (см., например, предложение 13.5 в [1]).

В силу теоремы 1 в [6], а также теоремы 6.1 в [7] (см. лемму 9.4 в [1]) имеем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n, n \geq 2, x_0 \in \partial D$. Предположим, что область D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а граница области D' сильно достижима. Пусть $f : D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Если выполнено условие

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|K_O\|_{n-1}(r)} = \infty,$$

где $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$ и

$$\|K_O\|_{n-1}(r) = \|K_O\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int_{S(x_0, r)} K_O^{n-1}(x, f) dA \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (1)$$

$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, то отображение f продолжается в точку x_0 по непрерывности в \mathbb{R}^n .

Здесь и далее K_O определена нулем вне области D .

Следствие 1. В частности, заключение леммы 1 имеет место, если

$$k_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$$

при $r \rightarrow 0$, где $k_{x_0}(r)$ — интегральное среднее значение K_O^{n-1} по сфере $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$.

Ввиду следствия 3 из [6] получаем также следующие следствия из результатов работы [8] для кольцевых Q -гомеоморфизмов.

Лемма 2. Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n, n \geq 2, D$ локально связна в $x_0 \in \partial D$, и пусть $f : D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$ такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$. Предположим, что

$$\int_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x, f) \psi^n(|x - x_0|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0))$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, где $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_0 < |x - x_0| < \varepsilon\}$ и $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Тогда f имеет непрерывное продолжение в точку x_0 .

Следуя [9], говорим, что локально интегрируемая функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x_0, \varepsilon)|} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty,$$

где

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{|B(x_0, \varepsilon)|} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x) -$$

интегральное среднее значение функции $\varphi(x)$ по шару $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Теорема 1. Пусть D и D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, D локально связна в $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима и пусть $f: D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Если K_O^{n-1} имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in \bar{D}$, то f продолжим в x_0 по непрерывности в \mathbb{R}^n .

Следствие 2. В частности, заключение теоремы 1 имеет место, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x_0, \varepsilon)|} \int_{B(x_0, \varepsilon)} K_O^{n-1}(x, f) dm(x) < \infty.$$

Выбирая в лемме 2 функцию $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть D и D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, D локально связна в $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима и пусть $f: D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Если

$$\int_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x, f) \frac{dm(x)}{|x - x_0|^n} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, то f продолжим в x_0 по непрерывности в \mathbb{R}^n .

Обратная функция Φ^{-1} может быть корректно определена для любой неубывающей функции $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t) \geq \tau} t. \tag{2}$$

Напомним, что функция $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ называется выпуклой, если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda \Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2)$$

при всех $t_1, t_2 \in [0, \infty]$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Теорема 3. Пусть D и D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, D локально связна на границе, а D' имеет сильно достижимую границу и пусть $f: D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$. Если

$$\int_D \Phi(K_O^{n-1}(x, f)) dm(x) < \infty \tag{3}$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \quad (4)$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$, то f имеет непрерывное продолжение $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Условие (4) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений f с интегральными ограничениями вида (3) (см., например, замечание 5.1 в работе [10]).

3. Продолжение на границу обратных отображений. Напомним некоторые определения. Непрерывное отображение γ открытого подмножества Δ действительной оси \mathbb{R} или окружности в \mathbb{C} называется *штриховой линией* (см., например, раздел 6.3 в [1]). Напомним, что любое открытое множество Δ в \mathbb{R} состоит из счетного набора попарно непересекающихся интервалов. Это дает мотивировку для термина “штриховая линия”.

Следующая лемма о предельных множествах лежит в основе доказательства теоремы о продолжении на границу обратных гомеоморфизмов с конечным искажением. Эта лемма вытекает из леммы 9.1 в статье [7] (см. лемму 9.5 в [1]), а также теоремы 1 в [6].

Лемма 3. Пусть D и D' — области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, z_1 и z_2 — различные точки ∂D , $z_1 \neq \infty$, а $f : D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Предположим, что функция K_O является $(n-1)$ -интегрируемой на штриховых линиях

$$D(r) = \{x \in D : |x - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r)$$

для некоторого множества E чисел $r < |z_1 - z_2|$, имеющего положительную линейную меру. Если D локально связна в точках z_1 и z_2 , а $\partial D'$ является слабо плоской, то

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) = \emptyset.$$

Из леммы 3 непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 4. Пусть D и D' — области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, D локально связна на своей границе, а граница области D' является слабо плоской и пусть $f : D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L^{n-1}(D)$. Тогда отображение f^{-1} имеет продолжение в замыкание области \bar{D}' по непрерывности в \mathbb{R}^n .

Кроме того, ввиду теоремы 1 из [6], по теореме 9.2 в [7] (см. также теорему 9.7 в [1]) мы получаем справедливость следующего заключения.

Теорема 5. Пусть D и D' — области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, D локально связна на своей границе, а граница области D' является слабо плоской. Предположим, что $f : D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$ и, кроме того,

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \quad \forall x_0 \in \partial D$$

при некотором

$$\delta(x_0) < d(x_0) = \sup_{x \in D} |x - x_0|,$$

где величина $\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)$ определена в (1). Тогда отображение f^{-1} продолжается в замыкание области D' по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

4. Гомеоморфное продолжение на границу. Комбинируя результаты предыдущих двух разделов, получаем следующие теоремы.

Теорема 6. Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, D локально связна на своей границе, а область D' имеет слабо плоскую границу. Предположим, что $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Предположим, что

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \quad \forall x_0 \in \partial D, \quad (5)$$

где величина $\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)$ определена в (1) при некотором

$$\delta(x_0) < d(x_0) = \sup_{x \in D} |x - x_0|.$$

Тогда отображение f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Следствие 3. В частности, заключение теоремы 6 верно, если

$$k_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$$

при $r \rightarrow 0$, где $k_{x_0}(r)$ — интегральное среднее значение K_O^{n-1} по сфере $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$.

В качестве следствия из теоремы 6 мы получаем обобщение хорошо известной теоремы Геринга—Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между QED-областями (см. [11]).

Следствие 4. Пусть D и D' — ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, отображение $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Если условие (5) выполнено в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Лемма 4. Пусть D и D' — ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, и пусть $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Предположим, что

$$\int_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x, f) \psi^n(|x - x_0|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)) \quad \forall x_0 \in \partial D$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Выбирая в лемме 4 функцию $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

Теорема 7. Пусть D и D' — ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, и пусть $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Предположим, что

$$\int_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x, f) \frac{dm(x)}{|x-x_0|^n} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Теорема 8. Пусть D и D' — ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, и пусть $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с $K_O \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Если $K_O^{n-1}(x, f) \leq Q(x)$ п. в., где $Q \in FMO(\partial D)$, то f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Следствие 5. В частности, заключение теоремы 8 имеет место, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x_0, \varepsilon)|} \int_{B(x_0, \varepsilon)} K_O^{n-1}(x, f) dm(x) < \infty \quad \forall x_0 \in \partial D.$$

Теорема 9. Пусть D и D' — ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, и пусть $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$. Если

$$\int_D \Phi(K_O^{n-1}(x, f)) dm(x) < \infty$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$, то f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Детальные доказательства приведенных результатов можно найти в [12]. Полученные результаты могут быть применены, в частности, в теории уравнений Бельтрами (см., например, [13]).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. New York: Springer, 2009. 367 p.
2. Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V. On the boundary behaviour of solutions to the Beltrami equations. *Complex Var. Elliptic Equ.* 2013. **58**, № 5. P. 647–663.
3. Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами. *Алгебра и анализ.* 2013. **25**, № 4. С. 101–124.

4. Kovtonyuk D., Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E. On mappings in the Orlicz–Sobolev classes. *Ann. Univ. Buchar. (Math. Ser.)*. 2012. **3 (LXI)**. P. 67–78.
5. Tengvall V. Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *Calc. Var. Part. Differ. Equat.* 2014. **51**, № 1–2. P. 381–399.
6. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории классов Соболева с критическим показателем. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 8. С. 3–8. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.003>
7. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И. К теории нижних Q -гомеоморфизмов. *Укр. мат. вісн.* 2008. **5**, № 2. С. 159–184.
8. Ломако Т.В. О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу. *Укр. мат. журн.* 2009. **61**, № 10. С. 1329–1337.
9. Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Слабо плоские пространства и границы в теории отображений. *Укр. мат. вісн.* 2007. **4**, № 2. С. 199–234.
10. Kovtonyuk D., Ryazanov V. On the boundary behavior of generalized quasi-isometries. *J. Anal. Math.* 2011. **115**. P. 103–119.
11. Gehring F.W., Martio O. Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. *J. Anal. Math.* 1985. **45**. P. 181–206.
12. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории отображений класса Соболева с критическим показателем. *Укр. мат. вісн.* 2018. **15**, № 2. С. 154–176.
13. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation: a geometric approach. *Developments of Mathematics*. Vol. 26. New York etc.: Springer, 2012. 302 p.

Поступило в редакцию 05.07.2019

REFERENCES

1. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2009). *Moduli in modern mapping theory*. New York: Springer.
2. Kovtonyuk, D., Petkov, I. & Ryazanov, V. (2013). On the boundary behaviour of solutions to the Beltrami equations. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 58, No. 5, pp. 647-663.
3. Kovtonyuk, D. A., Petkov, I. V., Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2013). Boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations. *Algebra i analiz*, 25, No. 4, pp. 101-124 (in Russian).
4. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V., Salimov, R. & Sevost'yanov, E. (2012). On mappings in the Orlicz–Sobolev classes. *Ann. Univ. Buchar. (Math. Ser.)*, 3 (LXI), pp. 67-78.
5. Tengvall, V. (2014). Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *Calc. Var. Part. Differ. Equat.*, 51, No. 1-2, pp. 381-399.
6. Afanas'eva, O. S., Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2019). Toward the theory of the Sobolev classes with critical exponent. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 8, pp. 3-8. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.003>
7. Kovtonyuk, D. A. & Ryazanov, V. I. (2008). On the theory of lower Q -homeomorphisms. *Ukr. mat. visnyk*, 5, No. 2, pp. 159-184 (in Russian).
8. Lomako, T. V. (2009). On the extension of some generalizations of quasiconformal mappings to the boundary. *Ukr. mat. zhurn.*, 61, No. 10, pp. 1329-1337 (in Russian).
9. Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2007). Weakly flat spaces and boundaries in the theory of mappings. *Ukr. mat. visnyk*, 4, No. 2, pp. 199-234 (in Russian).
10. Kovtonyuk, D. & Ryazanov, V. (2011). On the boundary behavior of generalized quasi-isometries. *J. Anal. Math.*, 115, pp. 103-119.
11. Gehring, F. W. & Martio, O. (1985). Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. *J. Anal. Math.*, 45, pp. 181-206.
12. Afanas'eva, E. S., Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2018). On the theory of mappings of the Sobolev class with a critical exponent. *Ukr. mat. visnyk*, 15, No. 2, pp. 154-176 (in Russian).
13. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2012). The Beltrami equation: a geometric approach. *Developments of Mathematics*, Vol. 26. New York etc.: Springer.

Received 05.07.2019

О.С. Афанасьєва¹,
В.І. Рязанов¹, Р.Р. Салимов²

¹ Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ

² Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

ПРО ГРАНИЧНУ ПОВЕДІНКУ В КЛАСАХ СОБОЛЄВА ІЗ КРИТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ

Знайдено умови на зовнішню дилатацію $K_O(x, f)$ та межі областей \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, при яких гомеоморфізми f класів Соболева $W_{loc}^{1,1}$ допускають неперервне або гомеоморфне продовження в замикання областей.

Ключові слова: класи Соболева, критичний показник, зовнішня дилатація, гранична поведінка, неперервне і гомеоморфне продовження.

О.С. Афанас'єва¹,
В.І. Рязанов¹, Р.Р. Салимов²

¹ Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slov'yansk

² Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

BOUNDARY BEHAVIOR OF THE SOBOLEV CLASSES WITH CRITICAL EXPONENT

The conditions for outer dilation $K_O(x, f)$ and the boundaries of domains under which the homeomorphisms of the Sobolev classes $W_{loc}^{1,1}$ admit a continuous or homeomorphic extension to the boundary are founded.

Keywords: Sobolev's classes, critical exponent, outer dilation, boundary behavior.