

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.12.013>

УДК 519.633.6

**С.І. Ляшко, Д.А. Ключин, А.А. Тимошенко**

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

E-mail: inna-andry@ukr.net

## **Оптимальне керування інтенсивністю занурених точкових джерел води у ненасиченому пористому середовищі**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України С.І. Ляшко*

*Розглядається двовимірна квазілінійна задача точкового оптимального керування зволоженням прямокутної ненасиченої області пористого середовища з нульовими початковими умовами, нульовою вологістю на границі та заданою досяжною цільовою вологістю. Запропоновано підхід, який використовує перетворення Кірхгофа, що дозволяє звести квазілінійну параболічну початково-крайову задачу до лінійної та безрозмірної. Показано коректність лінеаризованої безрозмірної задачі нестационарного вологоперенесення, зокрема теореми щодо існування та єдиності узагальненого розв'язку, а також існування та єдиності оптимального керування потужністю занурених точкових джерел.*

*Наведено результати обчислювальних експериментів, які продемонстрували високу точність методу. Запропонований метод дозволяє розв'язати актуальну задачу оптимального вибору параметрів системи крапельного зрошення та збільшити її ефективність.*

**Ключові слова:** *оптимізація, рівняння Річардса—Клюта, керування, метод скінченних різниць, пористе середовище.*

Квазілінійне рівняння Річардса—Клюта не є повністю дослідженим з точки зору оптимального керування. При цьому у цих задачах властивості ґрунту, а не параметри джерел зволоження, зазвичай досліджуються більш детально. Для розв'язання лінійних задач керування підземним переносом вологи з точкових джерел застосовано триетапний варіаційний алгоритм із використанням спряженого оператора [1–3] та чисельний підхід до розв'язання рівняння Річардса—Клюта, що базується на лінеаризації. Система рівнянь будується за допомогою методу скінченних різниць. При використанні розпаралелювання процесів обчислень для прискорення роботи алгоритму, можна застосувати підхід, описаний у [4]. Коректність побудованої моделі досліджується методом, викладеним у роботах [5–9].

Мета даної роботи — розробка варіаційного алгоритму ідентифікації оптимальної потужності точкових джерел, який дозволяє розв'язувати квазілінійні задачі переносу вологи

у ненасиченому пористому середовищі за допомогою їх лінеаризації на основі перетворення Кірхгофа при реалістичних припущеннях та доведення його ефективності.

**Постановка задачі.** Розглядається двовимірна задача зволоження прямокутної області пористого середовища з нульовою початковою вологістю, нульовою вологістю на границі та заданою цільовою вологістю у останній момент часу. Процес описується рівнянням:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_x(\omega) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K_y(\omega) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N Q_j(t) \delta(x - x_j) \delta(y - y_j), \quad (1)$$

$$(x, y, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \quad \omega|_{x=0} = 0; \quad \omega|_{x=L_1} = 0; \\ \omega|_{y=0} = 0; \quad \omega|_{y=L_2} = 0; \quad \omega(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (2)$$

Тут  $H = \psi(\omega) - y$  — напір;  $D_y(\omega) = K_y(\omega) \frac{d\psi}{d\omega}$  — коефіцієнт дифузійності вздовж осі  $y$ ;  $\Omega_0 = [(x, y): 0 < x < L_1, 0 < y < L_2]$ ;  $y = y_0$  — рівень поверхні ґрунту (вісь  $Oy$  направлена згори вниз). Будемо вважати, що  $K_x(\omega) = k_1 k(\omega)$ ,  $K_y(\omega) = k_2 k(\omega)$ , де  $k_1, k_2$  — коефіцієнти водопроникності вздовж осей  $Ox, Oy$ ;  $k(\omega)$  — функція вологості ґрунту. Для простоти викладення покладемо  $k_1 = k_2, L_1 = L_2 = 1$ . Для переходу до безрозмірного лінійного рівняння, наслідуючи Д.Ф. Шульгіна і С.М. Новосельського [10], введемо наступні змінні:

$$\beta_2 = 0,5\ell, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \beta_2, \quad \alpha = \frac{\langle D_y \rangle \beta_2^2}{T}, \\ \xi = \frac{\beta_1}{L_1} x, \quad \zeta = \frac{\beta_2}{L_2} y, \quad \tau = \alpha t.$$

де  $\langle D_y \rangle$  — середнє значення  $D_y$ .

Застосуємо перетворення Кірхгофа [10]:

$$\Theta = \frac{4\pi k_1}{Q^* k_2 \beta_2} \int_{\omega_0}^{\omega} D_y(\omega) d\omega,$$

де  $Q^*$  — масштабний множник, та припустимо, що виконуються наступні умови:

Залежність між  $\Theta(\omega)$  та  $K_y(\omega)$  є лінійною, тобто  $D_y^{-1}(\omega) \frac{dK_y(\omega)}{d\omega} = \ell = \text{const}$ ;

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{k_2 \beta_2 Q^*}{4\pi k_1} \frac{1}{D_y(\omega)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \approx \frac{k_2 \beta_2^3 Q^*}{4\pi k_1} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}.$$

Введемо наступні позначення:  $q_j = \frac{Q_j}{Q^*}$ ,  $\Omega, \Gamma$  — безрозмірні аналоги областей  $\Omega_0, \Gamma_0$ , де  $\Gamma_0$  — границя області  $\Omega_0$ .

У такому випадку початково-крайова задача (1), (2) зводиться до вигляду:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + 4\pi \sum_{j=1}^N q_j(\tau) \delta(\xi - \xi_j) \times \delta(\zeta - \zeta_j), (\xi, \zeta, \tau) \in \Omega \times (0, 1], \quad (3)$$

$$\Theta|_{\xi=0} = 0; \quad \Theta|_{\xi=1} = 0;$$

$$\Theta|_{\zeta=0} = 0; \quad \Theta|_{\zeta=1} = 0; \quad (\xi, \zeta, \tau) \in \Gamma \times [0, 1]. \quad (4)$$

$$\Theta(\xi, \zeta, 0) = 0, (\xi, \zeta) \in \Omega.$$

Позначимо  $r_j, j = \overline{1, N}$  – положення джерел потужністю  $q_j(\tau)$ . Цільові значення вологості  $\varphi_m(\tau)$  інтерпретуються, як усереднення  $\Theta(\xi, \zeta, \tau)$  в околі  $\omega_m$  заданих точок  $(\xi_m, \zeta_m) \in \Omega, m = \overline{1, M}$ . Метою є пошук значень  $q_j(\tau) j = \overline{1, N}$ , які мінімізують квадратичне відхилення  $\Theta(\xi_m, \zeta_m, \tau)$  від  $\varphi_m(\tau)$  у нормі  $L_2(0, 1)$ .

Нехай оптимальне керування належить гільбертовому простору  $(L_2(0, 1))^N$  зі скалярним добутком

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^N \int_0^1 x_j(\tau) y_j(\tau) d\tau,$$

згладжуючий функціонал запишемо як

$$J_\alpha(\bar{Q}) = \sum_{m=1}^M \int_0^1 \left( \varphi_m(\tau) - \int_{\Omega} g_m(\xi, \zeta) \Theta(\xi, \zeta, \tau) d\Omega \right)^2 d\tau + \alpha \|\bar{Q}\|^2, \quad (5)$$

де  $\bar{Q}(\tau) = (q_1(\tau), \dots, q_N(\tau))^T$  – вектор керування;  $g_m(\xi, \zeta) = \frac{\chi_{\omega_m}}{\text{diam} \omega_m}$  – ядро усереднення в області  $\omega_m$ ;  $\chi_{\omega_m}$  – індикаторна функція;  $\alpha > 0$  – параметр регуляризації відповідно до похибок вимірів. Оптимальне керування мінімізує функціонал

$$J_\alpha(\bar{Q}^*) = \min_{q \in (L_2(0, 1))^N} J_\alpha(\bar{Q}). \quad (6)$$

**Коректність моделі.** Нехай  $H$  – поповнення простору гладких функцій, що задовольняють (2) по нормі:  $\|u\|_H = \left( \int_Q (u_\tau^2 + u_\xi^2 + u_\zeta^2) dQ \right)^{\frac{1}{2}}$ . Позначимо  $H_+$  – аналогічний простір, що задовольняє початкові та граничні умови спряженої задачі (4). Розширивши оператор  $L$  на  $H$  за неперервністю з урахуванням граничних умов, отримаємо операторне рівняння:

$$L\Theta \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \Delta \Theta + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = f. \quad (7)$$

Застосувавши підходи, описані у [2], отримаємо наступні теореми.

**Теорема 1.** Для будь-якої функції  $f \in (H_+)^*$  існує єдиний слабкий розв'язок задачі (7), тобто  $\langle \Theta, L^* \Psi \rangle_{L^2(Q)} = \langle f, \Psi \rangle_+ \quad \forall \Psi \in H_+, \Theta \in L_2(Q)$ .

Ця теорема безпосередньо випливає з теореми, доведеної у [2], як частинний випадок.

**Теорема 2.** Якщо стан системи визначається як слабкий розв'язок (7), то існує єдине оптимальне керування, що мінімізує функціонал (6).

**Алгоритм.** Для розв'язання початково-крайової задачі (3), (4) застосуємо ітераційний алгоритм [2], який складається з трьох етапів:

1. розв'язання прямої задачі

$$L\Theta^{(k)} \equiv \frac{\partial \Theta^k}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta^k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Theta^k}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial \Theta^k}{\partial \zeta} = 4\pi \sum_{j=1}^N q_j(\tau) \delta(\xi - \xi_j) \times \delta(\zeta - \zeta_j); \quad (8)$$

$$0 < \tau \leq 1; \quad \Theta^k(0) = 0;$$

2. розв'язання спряженої задачі

$$L^* \Psi^{(k)} \equiv - \frac{\partial \Psi^k}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Psi^k}{\partial \zeta} = 2(\Theta^k - \varphi(\tau)); \quad (9)$$

$$0 \leq \tau < 1, \quad \Psi^{(k)}(1) = 0;$$

3. обчислення нового значення інтенсивності джерел

$$\frac{Q^{(k+1)} - Q^{(k)}}{\tau_{k+1}} + \Psi^{(k)} + \alpha Q^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для розв'язання прямої задачі будується неявна різницєва схема для рівняння (8) та розбиття  $0 \leq \xi, \zeta \leq 1$  з кроком  $h = \frac{1}{30}$  та часовими кроками  $\tilde{\tau} = \frac{1}{100}$  для  $0 \leq \tau \leq 1$ .

Для прямої та спряженої задач було побудовано явну та неявну різницєві схеми. Для уточнення потужності джерела окрім наведеного вище співвідношення використовувались тришарові ітераційні алгоритми.

**Результати.** Цільову функцію вологості визначимо як результат моделювання безрозмірної задачі при потужності, рівній 10. Ітераційний пошук починається з нульової потужності. Розглянуто різні розташування зануреного джерела відносно області: поблизу кутів, бокових границь та у центрі області. Вибір параметра регуляризації враховував порядок розв'язків прямої та спряженої задач.

Максимальне відхилення отриманої потужності від бажаної склало менш ніж 2 % при параметрі регуляризації, рівному  $10^{-7}$  для кількох варіантів розташування джерела. Для умови зупинки за цією точністю кількість ітерацій при застосуванні тришарових методів була в середньому у 1,5 рази меншою, ніж для двошарових методів, тобто алгоритм працював швидше.

Таким чином, розроблено варіаційний алгоритм ідентифікації оптимальної потужності точкових джерел, який дозволяє розв'язувати квазілінійні задачі переносу вологи у насиченому пористому середовищі за допомогою їх лінеаризації на основі перетворення Кірхгофа при реалістичних припущеннях. Обчислювальні експерименти продемонструва-

ли високу точність методу. Запропонований метод дозволяє розв'язати актуальну задачу оптимального вибору параметрів систем крапельного зрошення та підвищити їх ефективність.

*Робота виконана в рамках проекту “Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології” (ГР №0219U003403), підтриманого Міністерством освіти та науки України.*

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Вабищевич П.Н. Численное решение задачи идентификации правой части параболического уравнения. *Изв. высш. учебн. заведений. Математика*. 2003. № 1. С. 29–37.
2. Ляшко С.И., Ключин Д.А., Семенов В.В., Шевченко К.В. Лагранжово-ейлеровий підхід до розв'язання оберненої задачі конвективної дифузії. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2007. № 10. С. 38–43.
3. Tymoshenko A., Klyushin D., Lyashko S. Optimal Control of Point Sources in Richards-Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. **754**. P. 194–203. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-91008-6\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91008-6_20)
4. Nikolaevskaya, E.A., Khimich, A.N., Chistyakova, T.V. Solution of linear algebraic equations by gauss method. *Studies in Computational Intelligence*. 2012. **399**. P. 31–44. [10.1007/978-3-642-25673-8\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-25673-8_3)
5. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Onotskyi V.V., Lyashko N.I. Optimal Control of Drug Delivery from Microneedle Systems. *Cybernetics and System Analysis*. 2018. **54**(3). P. 1–9. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0037-9>
6. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age – structured contamination sources in ground water. *Optimal control of age – structured populations in economy, demography, and the environment*. Eds. By R. Boucekcline et all. London and New York: Routledge, 2013. P. 277–292.
7. Lyashko S.I. Klyushin D.A., Palienko L.I. Simulation and generalized optimization in pseudo-hyperbolic systems. *J. Automation and Inform. Sci.* 2000. **32**(5). P. 108–117.
8. Lyashko S.I. Numerical solution of pseudoparabolic equations. *Cybernetics and System Analysis*. 1995. **31**(5). P.718–722. <https://doi.org/10.1007/BF02367730>
9. Lyashko S.I. Approximate solution of equations of pseudoparabolic type. *Comput. Mathematics and Math. Physics*. 1991. **31**(12). P. 107–111.
10. Шульгин Д. Ф., Новосельский С. Н. Математические модели и методы расчета влагопереноса при внутри почвенном орошении. *Математика и проблемы водного хозяйства*. Киев: Наук. думка, 1986. С. 73–89.

Надійшло до редакції 17.09.2019

#### REFERENCES

1. Vabishchevich, P. N (2003). Numerical solution of the problem of the identification of the right-hand side of a parabolic equation. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 47, No. 1, pp. 29-37 (in Russian).
2. Lyashko, S. H., Klyushin, D. A., Semenov, V. V. & Shevchenko, K. V. (2007). Eulerian and Lagrangian approach to solving the inverse convection–diffusion problem. *Dopov. Nac akad. nauk Ukr.*, No. 10, pp. 38-43 (in Ukrainian).
3. Tymoshenko, A., Klyushin, D. & Lyashko, S. (2019). Optimal Control of Point Sources in Richards-Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 754, pp. 194-203. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-91008-6\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91008-6_20)
4. Nikolaevskaya, E. A., Khimich, A. N. & Chistyakova, T. V. (2012). Solution of linear algebraic equations by gauss method. *Studies in Computational Intelligence*, 399, pp. 31-44. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-25673-8\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-25673-8_3)
5. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Onotskyi V.V. & Lyashko N.I. (2018). Optimal Control of Drug Delivery from Microneedle Systems. *Cybernetics and System Analysis*, 54(3), P. 1–9. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0037-9>
6. Lyashko, S. I., Klyushin, D. A., Nomirovsky, D. A. & Semenov, V. V. (2013). Identification of age – structured contamination sources in ground water. *Optimal control of age – structured populations in economy, demography, and the invironment*. Eds. By R. Boucekcline et all.), London and New York: Routledge, pp. 277-292.
7. Lyashko, S. I. Klyushin, D. A. & Palienko, L. I. (2000). Simulation and generalized optimization in pseudo-hyperbolic systems. *J. Automation and Inform. Sci.*, 32(5), pp. 108-117.

8. Lyashko, S. I. (1995). Numerical solution of pseudoparabolic equations. *Cybernetics and System Analysis*, 31(5), pp. 718-722. <https://doi.org/10.1007/BF02367730>
9. Lyashko, S. I. (1991). Approximate solution of equations of pseudoparabolic type. *Comput. Mathematics and Math. Physics*, 31(12), pp. 107-111.
10. Shulgin, D. F. & Novoselskiy, S. N. (1986). Mathematical models and methods of calculation of humidity transfer during subsurface irrigation. *Matematika I problemy vodnogo khozyajstva*, Kyiv: Naukova Dumka, pp. 73-89 (in Russian).

Received 17.09.2019

С.И. Ляшко, Д.А. Ключин, А.А. Тимошенко

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

E-mail: inna-andry@ukr.net

#### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ЗАГЛУБЛЕННЫХ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ВОДЫ В НЕНАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Рассматривается двумерная квазилинейная задача точечного оптимального управления увлажнением прямоугольной ненасыщенной области пористой среды с нулевыми начальными условиями, нулевой влажностью на границе и заданной достижимой целевой влажностью. Предложен подход, использующий преобразование Кирхгофа, позволяющее свести квазилинейную параболическую начально-краевую задачу к линейной и безразмерной. Показана корректность линеаризованной безразмерной задачи нестационарного влагопереноса, в частности теоремы о существовании и единственности ее обобщенного решения, а также существовании и единственности оптимального управления мощностью заглубленных точечных источников.

Приведены результаты вычислительных экспериментов, которые продемонстрировали высокую точность метода. Предложенный метод позволяет решить актуальную задачу оптимального выбора параметров систем капельного орошения и повысить ее эффективность.

**Ключевые слова:** оптимизация, уравнение Ричардса–Клута, управление, метод конечных разностей, пористая среда.

S.I. Lyashko, D.A. Klyushin, A.A. Tymoshenko

Taras Shevchenko National University of Kyiv

E-mail: inna-andry@ukr.net

#### OPTIMAL CONTROL OVER INSERTED POINT SOURCE INTENSITY FOR HUMIDIFICATION OF A TWO-DIMENSIONAL POROUS MEDIUM

The humidity transfer process through an unsaturated porous medium with inserted point sources modeled by the Richards–Klute equation has calculation complexity and is unstable. The reason for that is a large number of diverse parameters for the equation used to describe the physical process. To reduce the difficulty, an approach is offered based on the Kirchhoff transformation, which allows one to bring down the quasilinear parabolic initial-boundary problem to a linear dimensionless one. A two-dimensional quasilinear problem of optimal control using point sources for a rectangular unsaturated porous medium with zero initial conditions, zero humidity at the bounds, and the achievable given target humidity is considered, studied, and solved for the first time.

The initial problem is transformed into the linear dimensionless optimal control problem of non-stationary moisture transport in an unsaturated porous medium using the Kirchhoff transformation. A variation algorithm identifying the optimal source power is used, which allows modeling the process with realistic assumptions. For this algorithm, the finite difference method is used for both direct and conjugate problems, followed by the numerical method application to solve the SLAE. The correctness of the linearized dimensionless problem of moisture transport is shown. In particular, the theorems of existence and uniqueness of the generalized solution are mentioned, as well as the existence and uniqueness of the optimal control over the source power.

The current paper is devoted to the modeling of the moisture transport from an inserted source in a dry ground area. Results of numerical experiments demonstrating a high accuracy of the method are given. The proposed method allows one to solve actual problems of optimal parameter choice for a drop irrigation system, and to improve its effectiveness.

**Keywords:** optimization, Richards–Klute equation, control, finite difference method, porous medium.